A. DUSCHEK – W. MAYER

# LEHRBUCH DER DIFFERENTIALGEOMETRIE

## BAND II

## RIEMANNSCHE GEOMETRIE

VON

WALTHER MAYER
PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT WIEN

MIT 7 FIGUREN IM TEXT



1930
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

# Vorwort.

Dieses Lehrbuch umfaßt zwei Bände, von denen der erste die sogenannte elementare Differentialgeometrie behandelt, während der zweite den allgemeinen Riemannschen Räumen gewidmet ist. Die beiden Bände sind inhaltlich durchaus unabhängig voneinander, so daß insbesondere der zweite Band auch ohne Kenntnis des ersten lesbar ist. Es waren dadurch an vereinzelten Stellen Wiederholungen nicht zu vermeiden, doch haben wir stets getrachtet, dieselben durch Wahl verschiedener Gesichtspunkte nicht eintönig werden zu lassen. Der Anfänger allerdings, der von Differentialgeometrie noch nicht mehr kennt, als was in den Vorlesungen über Infinitesimalrechnung an geometrischen Anwendungen gebracht zu werden pflegt, wird gut daran tun, mit der Lektüre des zweiten Bandes nicht vor der des ersten zu beginnen.

Die Geometrie mehrdimensionaler Riemannscher Räume umfaßt die des dreidimensionalen euklidischen Raumes als Spezialfall. Trotzdem bedarf die getrennte Behandlung des letzteren im ersten Band wohl kaum einer näheren Begründung, die durch den Hinweis auf gewisse, teils überhaupt, teils nach dem gegenwärtigen Stand der Forschung nicht verallgemeinerungsfähige Probleme, durch den Hinweis auf den historischen Werdegang und schließlich durch Erwägungen didaktischer Natur leicht zu geben wäre. Dazu kommt noch die große Mannigfaltigkeit spezieller Fragestellungen, die gerade hier unser Interesse in besonderem Maße fesseln, weil sie den Anschauungsraum, das Nebeneinander unserer Sinneswelt widerspiegeln. So gut nun dieses Sonderinteresse zu verstehen ist und so wenig gegen dasselbe als mathematische Geschmacksrichtung prinzipiell gesagt werden kann, so sehr überspannt es seinen Anspruch in dem Augenblick, wo es diese Anschaulichkeit zum Wertmaßstab macht. In der Tat entziehen sich die mehrdimensionalen Räume so sehr jener Art von unmittelbarer Anschauung, wie sie etwa dem Techniker wertvoll ist, daß man sie „anfangs für Unsinn und später für Spielerei und unnützen Ballast"[1]) gehalten hat. Aber abgesehen von der erkenntnistheoretischen „Existenz" und „Realität" mehrdimensionaler Räume, die durch die Grundlagenforschung der letzten Jahrzehnte hinreichend geklärt erscheint, abgesehen auch von der Verwendung vier- und mehrdimensionaler Räume in

1) W. Wirtinger, *Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung*, Hamburger Abhandlungen, Sonderschrift 3, 1926.

der modernen Physik, muß nicht dem, der die Mathematik um ihrer selbst willen liebt, also die mathematische Idee an die Spitze stellt, die Beschränkung einer allgemein durchführbaren Spekulation auf einen Sonderfall als willkürlich und unverständlich erscheinen?

Im übrigen strebt auch die mehrdimensionale Differentialgeometrie nach Anschaulichkeit, und zwar nach jener allgemeinen mathematischen Anschaulichkeit, die immer dann entsteht, wenn ein seinen Zwecken angepaßter Kalkül die mathematischen Gesetzmäßigkeiten darstellt und durchleuchtet. Man mag über Wert oder Unwert des Formalismus für Entstehung und Entwicklung mathematischer Ideen urteilen wie man will, eines scheint uns festzustehen: die mathematische Idee an sich ist einfach und durchsichtig; verwickelt und undurchsichtig sind oft nur die Wege, auf denen wir sie suchen. Ebenso einfach und durchsichtig aber wie die mathematische Idee selbst ist ihre endgültige Fassung durch einen adäquaten Kalkül, und deshalb ist die Ausbildung eines solchen ein sicheres Zeichen für die Reife einer mathematischen Theorie. Dabei darf aber — was leider heute vielfach der Fall ist — der Kalkül niemals Zweck, immer nur Werkzeug, Mittel zum Zweck sein! Nichts liegt uns ferner, als nach H. Weyl's treffender Kennzeichnung „den Orgien eines Zweck gewordenen Formalismus" das Wort zu reden.

Der natürliche Kalkül der Differentialgeometrie ist die Tensorrechnung. Sie enthält die alte wohlvertraute Koordinatengeometrie, und die Einwände ihrer Kritiker richten sich implizit gegen diese mit, aber sie geht darüber hinaus. Dem geometrischen Charakter der zu leistenden Analyse angepaßt, erfüllt der Tensorkalkül die Formeln ihrer Herleitung und Darstellung nach auch dort noch mit geometrischem Inhalt, wo sich dieser der Fassung mit den Mitteln der Koordinatengeometrie entzieht.

Während sich die allgemeinen Riemannschen Räume ohne Tensorkalkül wohl überhaupt nicht fruchtbar behandeln lassen, wird er hier, von einem neueren englischen Buch abgesehen[1]), wohl zum erstenmal systematisch auch in der elementaren Flächentheorie verwendet. Die Vorteile liegen doch auf der Hand: Abkürzung aller Rechnungen, prägnante Formeln, deren geometrischer Inhalt, wie bereits erwähnt, ohne weiteres zu erkennen ist, die Möglichkeit, spezielle Parameter weitgehend vermeiden, gegebenenfalls aber doch einführen zu können usw. Im Zusammenhang damit erschien es geradezu selbstverständlich, auch die elementare Vektorrechnung einer Revision hinsichtlich ihrer formalen Seite zu unterziehen. Es ist in der Tat nicht einzusehen, warum die Methoden des allgemeinen Tensorkalküls nicht auch für den euklidischen Raum gut genug sein sollen — uns erscheinen sie besser als

1) J. E. Campbell, *A course of differential geometry*, Oxford 1926.

die gebräuchliche, weder notwendige noch besonders leistungsfähige Symbolik.[1])

Wer eine Gefahr oder eine Schwäche darin zu erblicken glaubt, daß ein Formalismus, indem er das Denken oft erspart, des Denkens entwöhnen könnte, dem sei entgegengehalten, daß die Stärke eines wohldurchdachten Formalismus gerade darin liegt, daß er scharf und sicher die Stelle aufweist, wo die mathematische Idee einzusetzen hat.

Bei der Korrektur haben uns Frau Jenny Lense und Lisl Duschek sowie die Herren G. Bergmann, L. Bieberbach, D. Blanuša, N. Hofreiter, H. Hornich, J. Lense, W. Reich und H. Schatz in liebenswürdigster Weise unterstützt; ihnen allen, ganz besonders aber den Herren Bieberbach und Lense für viele wertvolle kritische Bemerkungen und Anregungen, gebührt unser herzlichster Dank.

Wien, im Herbst 1929.

**A. Duschek. W. Mayer.**

Der vorliegende zweite Band ist aus Vorlesungen entstanden, die ich in den Jahren 1926 bis 1928 an der Wiener Universität gehalten habe. Ausschlaggebend für die Stoffwahl war neben meiner eigenen Arbeits- und Gedankenrichtung das Bestreben, ein lesbares Lehrbuch mittleren Umfangs zu schaffen. So mußte ich mir einerseits manche Beschränkung auferlegen, andrerseits vieles aufnehmen, was Gemeingut aller den gleichen Gegenstand behandelnden Lehrbücher ist.[2]) Es ist also mit Notwendigkeit zu erwarten, daß ein fachkundiger Leser manches Vorhandene als minder wesentlich und vieles Nichtvorhandene für wichtiger halten wird. Ausdrücklich erwähnen will ich nur noch, daß mir die in einem Buch über Riemannsche Geometrie gebotene Unterdrückung der ideenreichen und weite Perspektiven eröffnenden Ansätze von Weyl und Wirtinger besonders schwer gefallen ist. Soviel über das Fehlende; für das Vorhandene verweise ich auf das Inhaltsverzeichnis.

1) Man vergleiche auch eine demnächst in den Jahresberichten der D. M. V. erscheinende Note *Über symbolfreie Vektorrechnung* von A. Duschek.

2) Ohne Anspruch auf Vollständigkeit seien genannt:

D. J. Struik, *Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung,* Berlin 1922.

J. A. Schouten, *Der Ricci-Kalkül.* Berlin 1924.

T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto.* Rom 1925. Deutsche Ausgabe von A. Duschek u. d. T. *Der absolute Differentialkalkül und seine Anwendungen in Geometrie und Physik.* Berlin 1928.

L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry.* New York 1926.

E. Cartan, *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann.* Paris 1928.

Eine Reihe von Arbeiten, die ich gemeinsam mit meinen Freunden I. BLUMENFELD und C. BURSTIN verfaßt habe[1]), fanden in diesem Band Verwendung. Aber auch sonst wird der Fachmann in Resultaten und Methoden Neues und manches Alte in neuer Behandlung finden. Ich unterlasse eine ängstliche Aufzählung im einzelnen — bei dem Umfang der Literatur und der wechselseitigen Verflechtung der Ideen eine ebenso mißliche wie letzten Endes unwesentliche Bemühung.

**W. Mayer.**

---

1) BLUMENFELD-MAYER, *Über die Existenz Ebenster in Riemannschen Räumen.* Monatshefte für Mathematik und Physik, XXII.

BURSTIN-MAYER, *Das Formenproblem der $l$ dimensionalen Hyperflächen in $n$ dimensionalen Räumen konstanter Krümmung.* Ebenda, XXXIV.

MAYER, *Über das vollständige Formensystem der $F_l$ im $R_n$.* Ebenda, XXXV.

BURSTIN, *Beitrage zur $n$ dimensionalen Differentialgeometrie.* Ebenda, XXXVI. — Diese Note beschäftigt sich unter anderem ebenfalls mit den $F_l$ des $R_n$; diese Untersuchungen wurden dann in einer im gleichen Band erschienenen Arbeit von G. BERGMANN, *Über eine mit den Hypertorsen verwandte Flächenklasse*, weitergeführt.

# Inhaltsverzeichnis.


§ I. Tensoralgebra. Seite

1. Der $n$ dimensionale Punktraum der Tensorrechnung. Koordinatentransformation 1
2. Skalare Größen und kontravariante Vektoren . . . . . . . . . . . . . . . . 4
3. Kovariante Vektoren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
4. Adjungierte $n$-Beine . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
5. Tensoren . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 12
6. Die Vektorräume eines Punktes $P$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16
7. Die Pluckerschen Koordinaten eines Vektorraumes . . . . . . . . . . . . 20
8. Bemerkungen und Beispiele zur Tensoralgebra . . . . . . . . . . . . . . 22

II. Tensoranalysis.

1. Die tensorielle Ableitung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 29
2. Der Riccikalkül . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

III. Der $n$ dimensionale Riemannsche Raum $R_n$.

1. Einfuhrung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 36
2. Das Messen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
3. Das Messen (Fortsetzung) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
4. Die $l$ dimensionalen Mannigfaltigkeiten des $R_n$ . . . . . . . . . . . . . 50

IV. Formeln von Frenet. Der euklidische Raum.

1. Kurven im Riemannschen $R_n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 59
2. Der euklidische $R_n$. Rechtwinklige kartesische Koordinaten . . . . . . . . . 64
3. Kurven im euklidischen $R_n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72

V. Variationsrechnung.

1. Der $n$ dimensionale Punktraum der Variationsrechnung . . . . . . . . . . . 79
2. Der Eulersche Vektor . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 84
3. Bemerkungen über den Eulerschen Vektor . . . . . . . . . . . . . . . . 87
4. Die Normalform des Systems der Eulerschen Differentialgleichungen . . . . . 90
5. Die Normalkoordinaten mit einem Zentrum $P_0$ . . . . . . . . . . . . . . 93
6. Charakterisierung der Normalkoordinaten durch die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$ . . 98
7. Die Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion . . . . . . . . . . . . . . . . . . 101
8. Allgemeine Herleitung der $\mathcal{E}$-Funktion . . . . . . . . . . . . . . . 104
9. Zwei Folgerungen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 107
10. Skizzierung des zweidimensionalen Variationsproblems . . . . . . . . . . . 108
11. Anwendung auf den Riemannschen $R_n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 115

VI. Der Riemannsche $R_n$, Fortsetzung.

1. Die Parallelverschiebung von Levi-Civita . . . . . . . . . . . . . . . . 118
2. Eine Reihenentwicklung für die Parallelverschiebung. Der Krümmungstensor . 123
3. Geodätische Mannigfaltigkeiten und geodätische Koordinaten . . . . . . . . 132
4. Ebenen im $R_n$. Räume konstanter Krümmung . . . . . . . . . . . . . . 140
5. Eindeutig parallelverschobene Vektorräume im Riemannschen $R_n$ . . . . . . 147

VII. Die $l$ dimensionalen Hyperflächen im Riemannschen $R_n$ und die Erweiterung des absoluten Differentialkalküls.

§ Seite
1. Flächen- und Raumtensoren. Das verallgemeinerte Riccidifferential . . . . . . 154
2. Geodätische $F_l$ und Ebenen $E_l$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 158
3. Die Relativkrümmungen einer $F_l$ im $R_n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . 162

VIII. Spezielle Riemannsche Räume, insbesondere die Räume konstanter Krümmung.

1. Der Schursche Raum . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 167
2. Kongruenz eines Riemannschen $R_n$ um einen Punkt $P_0$ . . . . . . . . . . . 173
3. Fortsetzung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 177
4. Der $R_n$ konstanter Krümmung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 181
5. Die projektiven Koordinaten im $R_n$ konstanter Krümmung. Die Bewegungsgruppen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 188
6. Die Klein-Cayleysche projektive Darstellung der Räume konstanter negativer Krümmung. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 195
7. Konforme Abbildung der Räume konstanter Krümmung auf den euklidischen $R_n$ 199

IX. Die $l$ dimensionalen Hyperflächen des $n$ dimensionalen Raumes konstanter Krümmung. Das Formenproblem.

1. Die invarianten $J_k$-Räume der $F_l$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 201
2. Ein normiertes, die $J_k$-Räume aufspannendes Bein und die adjungierten Formen der $F_l$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 203
3. Die Ableitungsgleichungen. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 207
4. Berechnung der ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 209
5. Das Formenproblem . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 215
6. Die Formenquadrate . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 219
7. Die Einbettungszahl einer $F_l$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 222
8. Über die Krümmungstensoren der $F_l$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 223
9. Kurven auf der $F_l$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 224
10. Das Formensystem der $F_l$ im $n$ dimensionalen Raum $R_n$ der konstanten Krümmung $\varrho$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 226

Anhang.

I. Die Erweiterung des Satzes von Meusnier für die $F_l$ des euklidischen $R_n$ . . . . 233
II. Der Gaußsche Integralsatz im Riemannschen $R_n$. . . . . . . . . . . . . . 237
III. Der Tensorkalkül in der klassischen Mechanik . . . . . . . . . . . . . . . 240

Register . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244

## Zur Beachtung!

Die Formelverweise sind folgendermaßen zu verstehen (als Beispiel):

(III, 3, 15) heißt Formel (15) in Abschnitt III, § 3.

(3, 15) heißt Formel (15) in § 3 desselben Abschnittes, in dem der Verweis steht.

(15) heißt wie gewöhnlich (15) desselben Paragraphen, in dem der Verweis steht.

# I. Tensoralgebra.

## § 1. Der $n$ dimensionale Punktraum der Tensorrechnung. Koordinatentransformation.

Unter einem *n dimensionalen Punktraum* $R_n$ verstehen wir eine Mannigfaltigkeit von $\infty^n$ Elementen, die wir *Punkte* nennen. Das Symbol $\infty^n$ soll dabei besagen, daß jeder Punkt $P$ des $R_n$ durch die Angabe von $n$ (reellen) Zahlen

$$(1) \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

den *Koordinaten* des Punktes, in ein-eindeutiger Weise bestimmt ist, oder genauer, daß jedem Punkt $P$ des $R_n$ ein Zahlen-$n$-tupel eines bestimmten Bereiches[1]) zugeordnet ist und umgekehrt.

Bei nicht rein differentialgeometrischen Fragen, d. h. bei Fragen der Geometrie im großen, ist es nicht immer möglich, den betrachteten Raum durch ein einziges Parametersystem zu beschreiben; man denkt sich in solchen Fällen den Raum in endlich viele Teile so zerlegbar, daß jedes Teilgebiet eineindeutig durch Parameter beschrieben werden kann.[2])

Wir werden es im folgenden immer mit Funktionen $\Phi(P)$ der Punkte $P$ des $R_n$ zu tun haben, d. h. mit Vorschriften, die jedem Punkt $P$ einen Zahlwert zuordnen.

Aus der Gesamtheit der Koordinatensysteme wählen wir ein bestimmtes, z. B. (1) aus, in bezug auf welches wir die Stetigkeit und Differenzierbarkeit der betrachteten Funktionen beurteilen. Wir bezeichnen mit $m$ eine feste, mit $\varrho$ eine beliebige positive ganze Zahl, für die $0 < \varrho \leqq m$ ist. Eine Funktion $\Phi(P)$ heiße nun *$\varrho$ fach stetig differenzierbar*, wenn sie in dem ausgewählten Koordinatensystem (1) im üblichen Sinn, d. h. als Funktion der Koordinaten angesehen, $\varrho$ fach stetig differenzierbar ist.

Wir nennen dann weiter jedes Koordinatensystem ein *m-System*, in dem die eben definierte Gesamtheit der $\varrho$ fach stetig differenzierbaren Funktionen

1) In der Menge aller Zahlen-$n$-tupel (1) — wir nennen diese Menge kurz den *n dimensionalen Zahlraum* — sei dieser Bereich (das „Bild" des Punktraumes $R_n$) eine $n$ dimensionale topologische Kugel, d. h. ein umkehrbar eindeutiges und stetiges Bild der Menge aller Zahlen-$n$-tupel, für die $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqq a^2$ ist.

2) Man vergleiche den Integralsatz von Gauss-Bonnet im ersten Band, VI, § 5.

mit der Gesamtheit der Funktionen zusammenfällt, die im betrachteten System im üblichen Sinne $\varrho$fach stetig differenzierbar sind.

Ein $m$-System hat also die zwei charakteristischen Eigenschaften:

a) Die Punkte des $R_n$ sind ein-eindeutig den Zahlen-$n$-tupeln (1) des Systems zugeordnet.

b) Ist $\varrho \leqq m$, so haben $\varrho$fach stetig differenzierbare Funktionen der Punkte des $R_n$ und nur solche, als Funktionen der Koordinaten angesehen, stetige Ableitungen bis zur $\varrho$ten Ordnung einschließlich.

Das oben ausgewählte System (1) ist in trivaler Weise ein $m$-System, aber nicht das einzige. Denn sei

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \tag{2}$$

ein zweites $m$-System, so hat die nach a) ein-eindeutige Zuordnung der Punkte des $R_n$ zu den Zahlen-$n$-tupeln (1) und (2) eine ein-eindeutige Zuordnung dieser $n$-Tupel untereinander zur Folge, was wir

$$\bar{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{3}$$

$$x_i = \psi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \tag{4}$$

schreiben.[1]) Dabei sind die $\varphi_i$ und $\psi_i$ eindeutige Funktionen ihrer Argumente. Nun hat jede der Koordinaten $\bar{x}_i$ im System (2) alle Ableitungen

$$\frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \bar{x}_k} = \delta_{ik}, \quad \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial \bar{x}_k \partial \bar{x}_l} = 0, \ \ldots,$$

wo $\delta_{ik} = 1$ oder $= 0$ ist, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist, und somit sind die $\bar{x}_i$ nach b) $m$fach stetig differenzierbare Funktionen der Punkte des $R_n$ und haben daher auch (wieder nach b)) als Funktionen der $x_i$ stetige Ableitungen bis einschließlich $m$ter Ordnung. Es sind also die Funktionen $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ in (3) und ebenso die Funktionen $\psi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ in (4) genau $m$mal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente.

Damit ist aber der Nachweis für die Existenz unendlich vieler $m$-Systeme erbracht: Zufolge (3) und (4) ist jede $\varrho$fach stetig differenzierbare ($\varrho \leqq m$) Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ auch als Funktion der $\bar{x}_i$ genau $\varrho$mal stetig differenzierbar und umgekehrt.

Zwischen je zwei $m$-Systemen (1) und (2) bestehen somit die $2n$ Transformationsgleichungen (3) und (4), in denen die auftretenden Funktionen $m$mal stetig differenzierbar sind, und umgekehrt führt eine derartige Koordinatentransformation ein $m$-System wieder in ein $m$-System über.

---

1) Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, repräsentieren alle Indizes (lateinische und griechische) die Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Über doppelt vorkommende Indizes ist stets zu summieren. Vgl. für $n = 3$ und $n = 2$ die Festsetzungen im ersten Band I, § 1 und III, § 1. (3) und (4) schreiben wir auch $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $x_i = x_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$.

Aus (3) und (4) folgen die Identitäten

$$x_i = \psi_i(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \quad \text{und} \quad \bar{x}_i = \varphi_i(\psi_1, \ldots, \psi_n). \tag{5}$$

Da $m \geqq 1$ vorausgesetzt ist, sind die $\varphi_i$ und $\psi_i$ mindestens einmal stetig differenzierbar. Die erste der Identitäten (5) gibt demnach

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{x}_j} \cdot \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_k} = \delta_{ik} \tag{6}$$

oder für die Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} \cdot \frac{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1. \tag{7}$$

Jede der beiden in (7) auftretenden Funktionaldeterminanten ist als ganze rationale Funktion stetiger Funktionen selbst stetig, und da ihr Produkt 1 ist, kann in keinem Punkte $P$ des $R_n$ eine der beiden Determinanten verschwinden, da die andere sonst in $P$ unendlich groß werden müßte, also nicht stetig wäre. Somit ist in jedem Punkt des $R_n$

$$\frac{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0. \tag{8}$$

Existiert zur Koordinatentransformation (3), für die (8) gilt, auch die inverse Transformation (4), so sind die $\psi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ ebenso oft stetig differenzierbar (z. B. $m$ mal) wie die $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$. Jede $m$ fach stetig differenzierbare Transformation (3), für die (8) gilt und (4) existiert, führt daher ein $m$-System wieder in ein $m$-System über und die Gesamtheit aller derartigen Transformationen führt von einem $m$-System zu jedem anderen.

Wir wollen in der Folge $m$-Systeme *zulässige* Koordinatensysteme oder Bezugssysteme, auch kurz Systeme nennen. Dabei bedeutet $m$ eine je nach dem zu behandelnden Problem fest gewählte positive ganze Zahl.

Eine Aussage über Funktionen der Punkte des $R_n$ heißt *sinnvoll*, wenn sie in gleicher Weise für alle zulässigen Koordinatensysteme gilt.

In verschiedenen Gebieten der Mathematik und der mathematischen Physik hat man es öfters nur mit Teilen der Gesamtheit aller zulässigen Koordinatensysteme zu tun. Die klassische Mechanik betrachtet z. B. solche Systeme, die durch Transformationen der besonderen Gestalt

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= \varphi_i(x_1, \ldots, x_n, t) \\ \bar{t} &= t \end{aligned} \tag{9}$$

bzw. bei der Untersuchung starrer Körper durch Transformationen

$$\begin{aligned} \bar{x}_i &= a_{ik}(t)\, x_k + b_i(t) \\ \bar{t} &= t \end{aligned} \tag{10}$$

ineinander übergeführt werden können. Dabei bilden die $a_{ik}(t)$ eine orthogonale Matrix (vgl. für $n=3$, I, § 1 des ersten Bandes).

Die Transformationen (3) bilden ebenso wie die speziellen (9) und (10) in ihrer Gesamtheit eine *Transformationsgruppe*. (Vgl. I, § 2 des ersten Bandes.)

## § 2. Skalare Größen und kontravariante Vektoren.

Ist in einem Punkte $P$ des $R_n$ eine geometrische oder physikalische Größe $\Phi$, z. B. die Temperatur oder ein Potential, durch *einen* Zahlwert gegeben, so heißt sie eine *skalare Größe*, ein *Skalar* oder eine *Invariante*.

Derartige Größen sind völlig unabhängig von jedem Koordinatensystem definiert, müssen aber natürlich für unsere Zwecke auch durch Koordinaten beschrieben werden. Nun ist der Punkt $P$, in dem der Skalar $\Phi$ gegeben ist, in jedem zulässigen Koordinatensystem durch seine Koordinaten $x_i$ festgelegt, daher der Skalar $\Phi$ in $P$ durch die $n+1$ Größen

$$x_i, \Phi, \tag{1}$$

die sich beim Übergang vom Koordinatensystem (1, 1) zum Koordinatensystem (1, 2) nach dem Gesetz

$$\overline{\Phi} = \Phi, \quad \overline{x}_i = \overline{x}_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{2}$$

transformieren. Ist $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ in einem Gebiet des $R_n$ definiert, so nennen wir $\Phi$ eine skalare Raumfunktion oder bloß Raumfunktion. Dann hat nach § 1 die Aussage, eine solche Funktion sei $k$fach ($k \leqq m$) stetig differenzierbar den Sinn, daß $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ in einem $m$-System stetige Differentialquotienten bis einschließlich zur $k$ten Ordnung besitzt.

Neben den Skalaren sind in der Geometrie und Physik noch Größen anderer Art („extensive Größen" im Sinne GRASSMANNS) von Bedeutung.

Sei z. B. in einem beliebigen zulässigen Koordinatensystem die Bahnkurve

$$x_i = x_i(t) \tag{3}$$

eines Massenpunktes gegeben, bezogen auf die Zeit als Parameter. Wir wollen dabei die $x_i$ als stetig differenzierbare Funktionen von $t$ ansehen, was dann nach § 1 für jedes zulässige Koordinatensystem gilt. In der Kinematik betrachtet man bekanntlich in jedem Punkt $t$[1]) mit den Koordinaten (3) den *Geschwindigkeitsvektor*, dessen Komponenten in unserem Systeme die $n$ Werte

$$\lambda^i = \frac{d x_i}{d t} \tag{4}$$

1) D. i. der dem Wert $t$ des Parameters entsprechende Punkt der Bahnkurve mit den Koordinaten $x_i(t)$.

haben. Die $2n$ Größen

(5) $$x_1, \ldots, x_n; \quad \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}$$

heißen *Bestimmungsstücke* des Vektors; sie bestehen aus den Koordinaten $x_i$ des *Definitionspunktes* $x_i$ und den *Komponenten* $\frac{dx_i}{dt}$. Wir stellen uns die Frage, wie sie sich beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ transformieren. Aus $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$ folgt, daß

(6) $$\bar{x}_i(t) = \bar{x}_i[x_1(t), \ldots, x_n(t)]$$

die Bahnkurve unseres Massenpunktes im System $\bar{x}_i$ ist. Für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors gibt dann (6) die Transformation

(7) $$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}.$$

Der Geschwindigkeitsvektor im Bahnpunkte $t$, dessen Bestimmungsstücke die $2n$ Größen (5) sind, transformiert sich also beim Übergang zu einem anderen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ nach

(8) $$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \frac{d\bar{x}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dt}.$$

Wir nennen allgemein $n$ in einem Punkte $P(x_1, \ldots, x_n)$ gegebene Größen $\lambda^i$, insgesamt also die $2n$ Größen

(9) $$x_1, \ldots, x_n; \lambda^1, \ldots, \lambda^n$$

einen *kontravarianten Vektor*, wenn sich diese $2n$ Bestimmungsstücke beim Übergang zum Koordinatensystem $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ nach dem Gesetz

(10) $$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \lambda^k$$

transformieren. In jedem Koordinatensystem hat also der kontravariante Vektor (9) genau $2n$ Bestimmungsstücke, nämlich seine Komponenten $\lambda^1, \ldots, \lambda^n$ und die Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ des Definitionspunktes.[1]) Ein kontravarianter Vektor, z. B. (9), ist durch seine $2n$ Bestimmungsstücke in einem zulässigen Bezugssystem völlig bestimmt, da ja dann in jedem Bezugssystem nach (10) diese $2n$ Bestimmungsstücke berechenbar sind. Wir wissen aber noch nicht, ob diese Definition des kontravarianten Vektors widerspruchslos ist. Für den Übergang von unserem Ausgangssystem $x_i$ zu den $\bar{x}_i$ gelten ja die einen kontravarianten Vektor definierenden Transformationsgleichungen (10).

---

1) Die Indizes, die die Komponenten des kontravarianten Vektors numerieren, setzen wir in der üblichen Weise rechts oben an; $\lambda^i$ ist also die $i$te Komponente des Vektors (9).

Gelten aber entsprechende Gleichungen auch für zwei beliebige zulässige Systeme $\bar{x}_i$ und $\bar{\bar{x}}_i$? Es muß dann

$$\bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \quad \bar{\bar{\lambda}}^i = \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial \bar{x}_k} \bar{\lambda}^k \tag{11}$$

richtig sein, wo $\bar{\bar{x}}_1, \ldots, \bar{\bar{x}}_n; \bar{\bar{\lambda}}^1, \ldots, \bar{\bar{\lambda}}^n$ die $2n$ Bestimmungsstücke des Vektors (9) im System $\bar{\bar{x}}_i$ sind. Vom Ausgangssystem $x_i$ zum System $\bar{\bar{x}}_i$ führt die zusammengesetzte Transformation

$$\bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_i[\bar{x}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \bar{x}_n(x_1, \ldots, x_n)]. \tag{12}$$

Die $2n$ Bestimmungsstücke $\bar{\bar{x}}_i, \bar{\bar{\lambda}}^i$ genügen demnach den Relationen

$$\bar{\bar{x}}_i = \bar{\bar{x}}_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n), \quad \bar{\bar{\lambda}}^i = \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial x_l} \lambda^l = \frac{\partial \bar{\bar{x}}_i}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_l} \lambda^l; \tag{13}$$

die letzteren sind wegen

$$\bar{\lambda}^k = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_l} \lambda^l \tag{14}$$

mit den Relationen (11) identisch. Somit ist die Definition des kontravarianten Vektors widerspruchslos.[1])

In den obigen Überlegungen ist der Gruppennachweis für die Transformationen (10) des kontravarianten Vektors enthalten.

Da ein kontravarianter Vektor durch $2n$ Bestimmungsstücke festgelegt ist, bildet die Gesamtheit aller kontravarianten Vektoren einen $2n$ dimensionalen Raum, den wir den *kontravarianten Vektorraum* nennen. Die Gesamtheit aller kontravarianten Vektoren mit *festem* Anfangspunkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ heißt der *n dimensionale (kontravariante) Vektorraum* im Punkt $P$.[2])

Wir führen nun einige Sätze an, die direkte Folgerungen aus den Transformationsgleichungen (10) des kontravarianten Vektors sind.

A. Sind in einem Bezugssystem die Komponenten $\lambda^i$ eines kontravarianten Vektors $x_i, \lambda^i$ alle Null, so gilt dies auch für jedes andere Bezugssystem.

---

1) Die gemeinte Widerspruchslosigkeit bezieht sich auf die Möglichkeit, einen kontravarianten Vektor durch Angabe seiner Bestimmungsstücke $x_i, \lambda^i$ in einem ausgewählten Bezugssystem zu definieren, wobei die $\lambda^i$ *keiner* Einschränkung unterliegen. In der Definition des kontravarianten Vektors selbst kann kein Widerspruch enthalten sein, wie aus der Existenz des Geschwindigkeitsvektors (5) hervorgeht. Es ist aber nicht gezeigt worden, daß ein Geschwindigkeitsvektor willkürliche Komponenten haben kann.

2) Dagegen ist die Gesamtheit aller Vektoren mit beliebigem Anfangspunkt $P$, aber festen Komponenten $\lambda^i$, nach den Transformationsgesetzen an ein bestimmtes Koordinatensystem (oder zumindest an einen Teil aller zulässigen Koordinatensysteme) gebunden und somit kein sinnvoller geometrischer Begriff. Beschränkt man sich jedoch auf lineare Transformationen der Punktkoordinaten, d. h. treibt man *affine Geometrie* (vgl. I, § 2 des ersten Bandes), so gehen *feste* $\lambda^i$ in *feste* $\bar{\lambda}^i$ über; der Begriff des Vektors mit festen Komponenten, aber beliebigem Anfangspunkt ist ein sinnvoller Begriff der affinen Geometrie.

Diese Tatsache berechtigt uns, vom „*kontravarianten Nullvektor*" eines Punktes $P$ zu sprechen.

B. Ist $x_i, \lambda^i$ ein kontravarianter Vektor, so ist auch $x_i, \varrho\lambda^i$, d. h.

$$x_1, \ldots, x_n; \varrho\lambda^1, \ldots, \varrho\lambda^n$$

ein kontravarianter Vektor, wenn $\varrho$ ein Skalar, d. h. eine gegenüber unseren Raumtransformationen invariante Größe ist. Dieser Satz läßt sich auch folgendermaßen formulieren: *Man darf einen kontravarianten Vektor mit einem Skalar multiplizieren.*

C. Sind $x_i, \lambda^i$ und $x_i, \mu^i$ zwei Vektoren des kontravarianten Vektorraumes im Punkt $x_i$, so ist auch $x_i, \lambda^i + \mu^i$, d. h. $x_1, \ldots, x_n; \lambda^1 + \mu^1, \ldots, \lambda^n + \mu^n$ ein kontravarianter Vektor in $x_i$. Man darf demnach kontravariante Vektoren *mit demselben Definitionspunkt* addieren.

Aus A, B und C folgt: Sind in einem Punkte $x_i$ die Vektoren

$$x_i, \lambda^i; \; x_i, \mu^i; \ldots; x_i, \sigma^i$$

gegeben und gilt in einem zulässigen Koordinatensystem

$$A\lambda^i + B\mu^i + \cdots + F\sigma^i = 0$$

wo $A, \ldots, F$ Skalare sind, so gilt diese Beziehung in jedem zulässigen Koordinatensystem.

Somit ist die folgende Definition sinnvoll: *Wir nennen $m$ kontravariante Vektoren*[1])

$$x_1, \ldots, x_n; \; {}_{(\alpha)}\lambda^1, \ldots, {}_{(\alpha)}\lambda^n \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

*des Vektorraumes in $P(x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig (oder bloß abhängig), wenn eine Relation*

$$(15) \qquad {}_{(\alpha)}A\, {}_{(\alpha)}\lambda^i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

*besteht, in der nicht alle Skalare ${}_{(\alpha)}A$ gleich Null sind. Besteht dagegen eine solche Relation nicht, so heißen die $m$ Vektoren linear unabhängig.*

Es gilt dann: *Im kontravarianten Vektorraum eines Punktes $x_i$ gibt es genau $n$ unabhängige kontravariante Vektoren, während $n+1$ solche stets abhängig sind.*

Da die Abhängigkeit oder Unabhängigkeit von Vektoren mit gleichem Definitionspunkt nicht an ein bestimmtes Koordinatensystem gebunden ist, so können wir uns auf irgendein zulässiges Koordinatensystem beschränken. Wir wählen $n^2$ Größen ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha, i = 1, \ldots, n)$ so, daß die Determinante

1) Die Indizes $\alpha$, die vor dem die geometrische Größe (hier Vektor) bezeichnenden Buchstaben stehen, bedeuten bloße Numerationen, so z. B. bedeutet ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ die $i$te Komponente des $\alpha$ten der Vektoren ${}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i, \ldots, {}_{(m)}\lambda^i$. Auch die $\alpha$ unterliegen der Summationsvorschrift doppelt vorkommender Indizes.

(16) $$D\left({}_{(\alpha)}\lambda^i\right) = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^1 & {}_{(1)}\lambda^2 & \dots & {}_{(1)}\lambda^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}_{(n)}\lambda^1 & {}_{(n)}\lambda^2 & \dots & {}_{(n)}\lambda^n \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Dann sind die im Punkte $x_i$ definierten $n$ kontravarianten Vektoren

(17) $$x_1, \dots, x_n;\quad {}_{(\alpha)}\lambda^1, \dots, {}_{(\alpha)}\lambda^n$$

in der Tat linear unabhängig (die Gleichungen (15) mit den Unbekannten ${}_{(\alpha)}A$ haben dann nur die Nullösung), *und zwar ist* (16) *notwendig und hinreichend dafür.*

Ist nun $x_i, \mu^i$ ein weiterer Vektor des Punktes $x_i$, so ist wegen (16) das System linearer Gleichungen

(18) $$\mu^i = {}_{(\alpha)}\mu\, {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

nach den ${}_{(\alpha)}\mu$ eindeutig auflösbar, d. h. $\mu^i$ ist linear darstellbar durch die Vektoren (17).[1])

Durch eine Transformation

(19) $$ {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha\beta)}B\, {}_{(\beta)}\lambda^i \qquad (\alpha, \beta, i = 1, \dots, n)$$

mit nicht verschwindender Determinante

(20) $$\left| {}_{(\alpha\beta)}B \right| \neq 0$$

geht ein System unabhängiger Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ in ein zweites derartiges ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i$ über und umgekehrt.

Aus den Transformationsgleichungen (10) des kontravarianten Vektors folgt, daß die Eigenschaft seiner Komponenten, $\varrho$ fach stetig differenzierbar zu sein, sinnvoll, d. h. vom $m$-Bezugssystem unabhängig ist, sobald $\varrho \leqq m-1$ ist.

## § 3. Kovariante Vektoren.

Sei wieder ein $R_n$ auf ein zulässiges Koordinatensystem bezogen und in ihm ein Kraftfeld durch ein Potential $\Phi$ gegeben. In jedem Koordinatensystem ist dann $\Phi$ eine Funktion der Koordinaten, die durch $\Phi = f(x_1, \dots, x_n)$ im System $x_i$ und durch $\Phi = \bar{f}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ im System $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ gegeben sei. Im Punkte $P(x_1, \dots, x_n)$ [bzw. $P(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$] ist dann die Kraft durch ihre $n$ Komponenten

$$\lambda_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

wenn das System $x_i$, bzw. durch

$$\bar{\lambda}_i = \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{x}_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_i}$$

1) Die in (18) auftretenden Koeffizienten ${}_{(\alpha)}\mu$ sind Skalare. Aus $\mu^i - {}_{(\alpha)}\mu\, {}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ folgt die lineare Abhängigkeit der $n+1$ Vektoren.

gegeben, wenn das System $\bar{x}_i$ zugrunde gelegt ist. Nun folgt aus $f(x_1, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \ldots \bar{x}_n)$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{x}_k}\frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i} \quad \text{oder} \quad \lambda_i = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i}\bar{\lambda}_k.$$

Die $2n$ Bestimmungsstücke $x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des Kraftvektors transformieren sich somit nach dem Gesetz

(1) $$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \lambda_i = \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_i}\bar{\lambda}_k.$$

Allgemein nennen wir $n$ in einem Punkte $P(x_1, \ldots, x_n)$ gegebene Größen $\lambda_i$, also im ganzen $2n$ Größen

(2) $$x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_n$$

einen *kovarianten Vektor*, wenn sich diese $2n$ Bestimmungsstücke beim Übergang vom Koordinatensystem $x_i$ zum Koordinatensystem $\bar{x}_i$ nach dem Gesetz (1) transformieren; $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ heißen wieder *Komponenten* des kovarianten Vektors (2) mit dem *Definitionspunkt* $x_i$.

Die Indizes, die die Komponenten des kovarianten Vektors numerieren, sind in üblicher Weise *rechts unten* gesetzt.[1])

Man kann die Komponenten des kovarianten Vektors statt durch die Transformationsgleichungen (1), die wie die des kontravarianten Vektors eine Gruppe bilden, als *das Koeffizientensystem einer* im Punkte $x_i$ gegebenen, gegenüber Koordinatentransformationen *invarianten Linearform (der Komponenten) eines willkürlichen kontravarianten Vektors* $x_i, \varrho^i$ *definieren.* Ist

(3) $$\lambda_i \varrho^i = \lambda_1 \varrho^1 + \cdots + \lambda_n \varrho^n$$

diese Linearform im Systeme $x_i$ und

(4) $$\bar{\lambda}_i \bar{\varrho}^i$$

dieselbe Linearform im Systeme $\bar{x}_i$, so folgt aus unserer Festsetzung

$$\lambda_i \varrho^i = \bar{\lambda}_i \bar{\varrho}^i = \bar{\lambda}_i \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\varrho^k$$

oder

(5) $$\left(\lambda_k - \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\bar{\lambda}_i\right)\varrho^k = 0,$$

was wegen der Willkür des Vektors $\varrho^k$

(6) $$\lambda_k = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\bar{\lambda}_i$$

gibt.

Daraus folgt die wichtige Tatsache, daß das „*innere Produkt*“ eines in einem Punkte $x_i$ definierten kontravarianten Vektors $x_i, \lambda^i$ und eines im selben Punkt definierten kovarianten Vektors $x_i, \mu_i$, also die in den Komponenten eines jeden der beiden Vektoren lineare Form $\mu_i \lambda^i$ *eine Invariante (Skalar)* ist.

1) Die Koordinaten $x_i$ sind natürlich kein kovarianter Vektor.

Sind

(7) $$x_i,\ {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

$n$ unabhängige kontravariante Vektoren des Punktes $x_i$ und $x_i, \mu_i$ ein kovarianter Vektor im selben Punkt, so sind

(8) $${}_{(\alpha)}I = {}_{(\alpha)}\lambda^i \mu_i$$

$n$ Invarianten, aus denen wegen $|{}_{(\alpha)}\lambda^i| \neq 0$ die $n$ Komponenten $\mu_i$ als Funktionen der ${}_{(\alpha)}I$ und der ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ eindeutig berechenbar sind.

Dadurch erledigt sich der im vorhergehenden Paragraphen für den kontravarianten Vektor geführte Nachweis der Widerspruchslosigkeit der Definition des kovarianten Vektors, der natürlich auch hier ganz analog gegeben werden könnte. [Vgl. die Fußnote 1) S. 6.] In der Tat können wir aus den Größen ${}_{(\alpha)}I$ und ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ in jedem zulässigen Koordinatensystem die $n$ Größen $\mu_i$ berechnen. Da sich jeder kontravariante Vektor $x_i, \varrho^i$ wegen $|{}_{(\alpha)}\lambda^i| \neq 0$ linear durch die $n$ Vektoren (7) in der Form

$$\varrho^i = {}_{(\alpha)}\varrho\, {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

darstellen läßt, wo die ${}_{(\alpha)}\varrho$ Skalare sind, so folgt, daß ${}_{(\alpha)}I\, {}_{(\alpha)}\varrho = \varrho^i \mu_i$ eine invariante Linearform des willkürlichen kontravarianten Vektors $x_i, \varrho^i$ des Punktes $P$ ist. Die Koeffizienten sind dann, wie wir zeigten, die Komponenten eines kovarianten Vektors des Punktes $P$.

Die Sätze A, B und C, die wir im vorigen Paragraphen unmittelbar aus der Definition des kontravarianten Vektors folgerten, gelten unverändert auch für kovariante Vektoren. Denn diese Sätze ergeben sich ja ohne weiteres aus der Tatsache, daß die Transformationsgleichungen in den Komponenten sowohl des kontravarianten als auch des kovarianten Vektors linear und homogen sind. Im kovarianten Vektorraum

(9) $$x_i,\ \lambda_i$$

des *festen* Punktes $x_i$ gibt es ebenfalls genau $n$ unabhängige kovariante Vektoren

(10) $$x_i,\ {}_{(\alpha)}\mu_i.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung der Unabhängigkeit der $n$ Vektoren (10) ist

(11) $$D({}_{(\alpha)}\mu_i) = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\mu_1 & {}_{(1)}\mu_2 & \cdots & {}_{(1)}\mu_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ {}_{(n)}\mu_1 & {}_{(n)}\mu_2 & \cdots & {}_{(n)}\mu_n \end{vmatrix} \neq 0.$$

Jeder weitere kovariante Vektor $x_i, \nu_i$ des Punktes $x_i$ ist dann linear durch die Vektoren (10) darstellbar:

(12) $$\nu_i = {}_{(\alpha)}\nu\, {}_{(\alpha)}\mu_i.$$

## § 4. Adjungierte $n$-Beine.

Wir beweisen zunächst den Hilfssatz: Gelten für zwei Systeme von je $n^2$ Größen $a_{ik}$, $b_{ik}$, die Gleichungen

(1) $$a_{ik} b_{jk} = \delta_{ij},$$

so ist auch

(2) $$a_{ki} b_{kj} = \delta_{ij}.$$

Wir setzen

(3) $$a_{ki} b_{kj} = c_{ij}$$

und zeigen, daß
$$c_{ij} = \delta_{ij}$$

ist. Durch Multiplikation von (3) mit $b_{li}$ und darauffolgende Summation über die gleichen Indizes $i$ folgt nach (1)

(4) $$\delta_{kl} b_{kj} = c_{ij} b_{li}.$$

Nun können wir links an Stelle von $\delta_{kl} b_{kj} = b_{lj}$ auch $b_{lj} = b_{li} \delta_{ij}$ schreiben; (4) lautet dann

(5) $$b_{li}(c_{ij} - \delta_{ij}) = 0.$$

Nun ist nach (1) $|a_{ik}| \cdot |b_{jk}| = 1$, also $|b_{jk}| \neq 0$, weshalb aus (5)

(6) $$c_{ij} = \delta_{ij}$$

folgt, w. z. b. w.

Wir nennen ein System von $n$ unabhängigen kovarianten Vektoren eines Punktes $P$ des $R_n$

(7) $$x_i, \; {}_{(\alpha)}\mu_i$$

*ein kovariantes $n$-Bein des Punktes* $P$ und ebenso ein System von $n$ unabhängigen kontravarianten Vektoren eines Punktes $P$ des $R_n$

(8) $$x_i, \; {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

ein *kontravariantes $n$-Bein des Punktes* $P$.

Sei das kovariante $n$-Bein (7) gegeben. Durch die Gleichungen

(9) $${}_{(\alpha)}\mu_i \, {}_{(\beta)}\lambda^i = \delta_{\alpha\beta}$$

ist ihm dann eindeutig das kontravariante $n$-Bein

(10) $$x_i, \; {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

desselben Punktes zugeordnet. Aus (9) können wir nämlich wegen $|{}_{(\alpha)}\mu_i| \neq 0$ in einem willkürlich herausgegriffenen Koordinatensystem die ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ eindeutig berechnen. Dadurch sind in jedem System die Komponenten der $n$ kontravarianten Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ bestimmt. Da das innere Produkt eines kovarianten und eines kontravarianten Vektors invariant ist, so erfüllen die berechneten Komponenten ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ in jedem zulässigen Koordinatensystem die Relationen (9).

Somit bilden die aus (9) algebraisch bestimmbaren $n^2$ Größen ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ein kontravariantes $n$-Bein.

Gelten zwischen dem kovarianten $n$-Bein (7) und dem kontravarianten $n$-Bein (8) des Punktes $x_i$ die Relationen (9), so nennen wir (7) und (8) *adjungierte n-Beine*. Zufolge unseres Hilfssatzes gilt neben (9) auch ${}_{(i)}\mu_{\alpha\,(i)}\lambda^\beta = \delta_{\alpha\beta}$ oder bei anderer Bezeichnung der Indizes

(11) $$_{(\alpha)}\mu_{i\,(\alpha)}\lambda^k = \delta_{ik}.$$

Die Gleichungen (11) haben ihrerseits wieder (9) zur Folge.

## § 5. Tensoren.

*Die Gesamtheit der Koeffizienten einer Multilinearform mehrerer willkürlicher kovarianter und kontravarianter Vektoren*[1]) *eines Punktes $P$ des $R_n$ heißt Tensor im Punkt $P$, wenn die Form bei Festlegung der Vektoren einen vom Koordinatensystem unabhängigen Wert annimmt.* Wir sprechen dann kurz von einer *invarianten Multilinearform.*[2]) Die Koeffizienten selbst heißen die *Komponenten des Tensors*, dessen Bestimmungsstücke demnach die Koordinaten des Definitionspunktes $P$ und die Komponenten sind. Enthält die Multilinearform $a$ Vektoren, und zwar $a_1$ kontravariante und $a_2$ kovariante $(a = a_1 + a_2)$, so nennt man den Tensor von $a$ter Stufe, und zwar kovariant von $a_1$ter und kontravariant von $a_2$ter Stufe oder $a_1$fach kovariant, $a_2$fach kontravariant. Ist $a_1 = a$ (und somit $a_2 = 0$), so spricht man von einem *rein kovarianten Tensor $a$ter Stufe* und analog im Fall $a_2 = a\,(a_1 = 0)$ von einem *rein kontravarianten Tensor $a$ter Stufe.* In allen anderen Fällen $(0 < a_1 < a$, $0 < a_2 < a)$ heißt der Tensor *gemischt. Skalare nennt man auch Tensoren nullter Stufe.*

Beispiele: a) Es sei $x_i, \mu_i$ ein kovarianter Vektor. Ist dann $x_i, \lambda^i$ ein willkürlicher kontravarianter Vektor desselben Punktes, so ist die Linearform

$$\mu_i \lambda^i$$

eine Invariante bei Fixierung des Vektors $x_i, \lambda^i$. Also ist $\mu_i$ ein *kovarianter* Tensor erster Stufe; die Koeffizienten $\mu_1, \ldots, \mu_n$ sind die Komponenten

---

1) Multilinearform mehrerer Vektoren ist ein in den Komponenten jedes einzelnen Vektors homogenes und lineares Polynom.

2) Da eine Form durch die Gesamtheit ihrer Koeffizienten bestimmt ist und umgekehrt (solange die Veränderlichen, d. h. die Vektorkomponenten *willkürlich* sind), kann man, wenn man will, auch eine Multilinearform willkürlicher Vektoren selbst als Tensor bezeichnen.

dieses Tensors erster Stufe, dessen Bestimmungsstücke demnach $x_i, \mu_i$ sind. Ebenso ist der kontravariante Vektor ein kontravarianter Tensor erster Stufe.

b) Sind in $P$ zwei kovariante und ein kontravarianter Vektor gegeben

$$x_i, \lambda_i;\ x_i, \mu_i;\ x_i, \nu^i \tag{1}$$

und setzen wir

$$T^j_{ik} = \lambda_i \mu_k \nu^j, \tag{2}$$

so ist bei willkürlichen Vektoren $\varrho^i$, $\sigma^i$ und $\tau_i$ des Punktes $P$

$$T^j_{ik} \varrho^i \sigma^k \tau_j = (\lambda_i \varrho^i)(\mu_k \sigma^k)(\nu^j \tau_j) \tag{3}$$

als Produkt dreier Invarianten ebenfalls eine Invariante und somit die $T^j_{ik}$ ein zweifach kovarianter, einfach kontravarianter Tensor dritter Stufe.

Hinsichtlich der Bezeichnung ist zu bemerken, daß Tensorindizes, die an kontravariante Vektoren gebunden sind, *kovariant* heißen und rechts unten gesetzt werden. Indizes, die an kovariante Vektoren gebunden sind, heißen *kontravariant* und werden rechts oben gesetzt. In der zugehörigen Multilinearform stehen demnach von zwei gleichen Indizes der eine oben und der andere unten.

Zwei Tensoren heißen *gleichartig*, wenn sie gleich viele kovariante und gleich viele kontravariante Indizes haben.

c) Ist $\delta^j_i = \delta_{ij}$, so sind

$$x_i, \delta^j_i \tag{4}$$

die Bestimmungsstücke eines einfach kovarianten, einfach kontravarianten Tensors zweiter Stufe.

Denn sind $\varrho^i$ und $\sigma_i$ zwei willkurliche Vektoren des Punktes $x_i$, so ist

$$\delta^j_i \varrho^i \sigma_j = \varrho^j \sigma_j \tag{5}$$

eine Invariante, w. z. b. w. In der Relation (4, 11) steht links ein Tensor von der Form $T^k_i$; nach (5) ist $\delta_{ik} = \delta^k_i$ ein Tensor gleicher Art. Schreiben wir die erwähnte Relation

$$_{(\alpha)}\mu_{i\,(\alpha)}\lambda^k = \delta^k_i, \tag{6}$$

so ist ihre Invarianz unmittelbar einleuchtend.

Ehe wir den allgemeinsten Tensor behandeln, werde als letztes Beispiel der allgemeine gemischte Tensor zweiter Stufe

$$x_i, \beta^j_i \tag{7}$$

betrachtet. Definitionsgemäß ist

$$\beta^k_i \lambda^i \varrho_k \tag{8}$$

für beliebige Vektoren $\lambda^i$ und $\varrho_i$ des Punktes $P$ invariant. Bezeichnen wir die Komponenten des Tensors in einem anderen Koordinatensystem $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$ ebenfalls mit Querstrichen, so gilt also

$$(9)\qquad \beta_i^k \lambda^i \varrho_k = \bar{\beta}_i^k \bar{\lambda}^i \bar{\varrho}_k.$$

Wegen $\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \lambda^j$ und $\bar{\varrho}_k = \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k} \varrho_l$ folgt aus (9)

$$(10)\qquad \left(\beta_j^l - \bar{\beta}_i^k \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k}\right) \lambda^j \varrho_l = 0,$$

was wegen der Willkür in der Wahl der Vektoren $\lambda^i$ und $\varrho_i$ auf

$$(11)\qquad \beta_j^l = \bar{\beta}_i^k \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_l}{\partial \bar{x}_k}$$

führt. (11) sind die Transformationsgleichungen der Komponenten des gemischten Tensors $\beta_i^k$; sie hätten als Definitionsgleichungen des Tensors dieser Art dienen können. Die Transformationsgleichungen sind in den Komponenten linear und homogen. Auch sieht man, daß in $m$-Systemen die Aussage, die Komponenten $\beta_i^l$ seien $\varrho$fach stetig differenzierbar, für $\varrho \leqq m - 1$ sinnvoll ist.

Es seien nun

$$(12)\qquad x_i,\ {}_{(\alpha)}\mu_i;\quad x_i,\ {}_{(\alpha)}\lambda^i$$

zwei adjungierte $n$-Beine des Punktes $x_i$, für die also

$$(13)\qquad {}_{(\alpha)}\mu_i\, {}_{(\beta)}\lambda^i = \delta_{\alpha\beta}$$

und

$$(14)\qquad {}_{(\alpha)}\mu_i\, {}_{(\alpha)}\lambda^k = \delta_i^k$$

gilt.

Ferner seien ${}_{(\alpha\beta)}b$ vorläufig unbestimmte Skalare im Punkte $x_i$. Dann sind die Größen

$$(15)\qquad \varepsilon_k^i = \beta_k^i - {}_{(\alpha\beta)}b\, {}_{(\alpha)}\lambda^i\, {}_{(\beta)}\mu_k$$

die Komponenten eines gemischten Tensors zweiter Stufe im Punkt $x_i$, da $\varepsilon_k^i \varrho_i \sigma^k$ für beliebige Vektoren $\varrho_i$ und $\sigma^k$ dieses Punktes invariant ist.

Durch Multiplikation von (15) mit ${}_{(\sigma)}\mu_i\, {}_{(\tau)}\lambda^k$ und Summation über $i$ und $k$ erhält man

$$(16)\qquad \varepsilon_k^i\, {}_{(\sigma)}\mu_i\, {}_{(\tau)}\lambda^k = \beta_k^i\, {}_{(\sigma)}\mu_i\, {}_{(\tau)}\lambda^k - {}_{(\sigma\tau)}b.$$

Legen wir jetzt die $n^2$ Skalare ${}_{(\alpha\beta)}b$ fest

$$(17)\qquad {}_{(\alpha\beta)}b = \beta_k^i\, {}_{(\alpha)}\mu_i\, {}_{(\beta)}\lambda^k,$$

so gilt wegen (16)

$$(18)\qquad \varepsilon_k^i\, {}_{(\alpha)}\mu_i\, {}_{(\beta)}\lambda^k = 0,$$

woraus nach Multiplikation mit ${}_{(\alpha)}\lambda^j\, {}_{(\beta)}\mu_l$ und Summation über $\alpha$ und $\beta$

$$(19)\qquad \varepsilon_l^j = 0$$

folgt. Umgekehrt hat (19) die Relationen (17) zur Folge.

*Es gilt somit die eindeutige Darstellung*

(20) $$\beta^i_k = {}_{(\alpha\beta)}b \, {}_{(\alpha)}\lambda^i \, {}_{(\beta)}\mu_k$$

*des Tensors $\beta^i_k$ mittels der adjungierten $n$-Beine* (12), wobei die $n^2$ Invarianten ${}_{(\alpha\beta)}b$ durch (17) gegeben sind. Daraus folgt noch, daß das Verschwinden der Tensorkomponenten $\beta^i_k$ die Relationen ${}_{(\alpha\beta)}b = 0$ zur Folge hat, also vom Bezugssystem (wieder nach (20)) unabhängig ist. Es hat daher Sinn, von *Nulltensoren* $\beta^i_k$ zu sprechen.

Die für den Tensor $x_i$, $\beta^i_k$ gewonnenen Ergebnisse gelten auch für den allgemeinen Tensor

(21) $$x_i, \; T^{i_1 \ldots i_s}_{k_1 \ldots k_r}.$$

Bilden wir mit Verwendung der adjungierten $n$-Beine im Punkte $x_i$ die Skalare

(22) $$_{(\sigma_1 \ldots \sigma_r \tau_1 \ldots \tau_s)}T = T^{i_1 \ldots i_s}_{k_1 \ldots k_r} \, {}_{(\sigma_1)}\lambda^{k_1} \ldots {}_{(\sigma_r)}\lambda^{k_r} \, {}_{(\tau_1)}\mu_{i_1} \ldots {}_{(\tau_s)}\mu_{i_s},$$

so gilt die zu (20) analoge Darstellung

(23) $$T^{i_1 \ldots i_s}_{k_1 \ldots k_r} = {}_{(\sigma_1 \ldots \sigma_r \tau_1 \ldots \tau_s)}T \, {}_{(\sigma_1)}\mu_{k_1} \ldots {}_{(\sigma_r)}\mu_{k_r} \, {}_{(\tau_1)}\lambda^{i_1} \ldots {}_{(\tau_s)}\lambda^{i_s}.$$

Die Darstellung (22), (23) ist eindeutig. Der Beweis ist dem zur Darstellung (20) führenden völlig analog und werde daher übergangen. Aus der Darstellung (23) sind folgende Tatsachen ablesbar:

a) Verschwinden in einem Koordinatensystem die Tensorkomponenten $T^{i_1 \ldots i_s}_{k_1 \ldots k_r}$, so sind die Skalare (22) alle Null und aus (23) folgt dann das Verschwinden der Tensorkomponenten in jedem Koordinatensystem *(Nulltensor)*. Diese Bemerkung ist von Wichtigkeit, weil fast alle geometrischen oder physikalischen Aussagen mathematisch durch das Verschwinden von Tensoren ausgedrückt werden.

b) Sind $T^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_r}$ und $S^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_r}$ die Komponentensysteme *gleichartiger* Tensoren eines Punktes $P$, so ist die *Tensorsumme*

$$T^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_r} + S^{j_1 \ldots j_q}_{k_1 \ldots k_r}$$

das Komponentensystem eines Tensors der gleichen Art in $P$.

c) Sind $T^{i_1 \ldots i_s}_{k_1 \ldots k_r}$ und $S^{j_1 \ldots j_q}_{h_1 \ldots h_p}$ zwei beliebige Tensoren eines Punktes $P$, so ist

$$T^{i_1 \ldots i_s}_{k_1 \ldots k_r} \cdot S^{j_1 \ldots j_q}_{h_1 \ldots h_p}$$

das Komponentensystem des „*Produkttensors*", dessen kovariante bzw. kontravariante Stufenzahl die Summe der entsprechenden Stufenzahlen seiner „Faktoren" ist.

Die Tensoraddition (b) und Multiplikation (c) sind kommutativ und assoziativ, für beide zusammen gilt das distributive Gesetz.

Neben diesen recht selbstverständlichen Operationen gibt es in der Tensorrechnung noch die Operation der „*Tensorverjüngung*". Sie ist auf gemischte

Tensoren anwendbar und besteht in der Gleichsetzung je eines kovarianten und eines kontravarianten Index und der dann üblichen Summation über diesen.

Setzen wir z. B. in (23) $i_1 = k_1 = j$, so erhalten wir wegen (13)

$$(24)\qquad T^{j\, i_2 \ldots i_s}_{j\, k_2 \ldots k_r} = {}_{(\sigma_1 \ldots \sigma_r \tau_1 \ldots \tau_s)} T\, {}_{(\sigma_2)}\mu_{k_2} \ldots {}_{(\sigma_r)}\mu_{k_r}\, {}_{(\tau_2)}\lambda^{i_2} \ldots {}_{(\tau_s)}\lambda^{i_s}\, \delta_{\sigma_1 \tau_1}$$
$$= {}_{(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_r \sigma_1 \tau_2 \ldots \tau_s)} T\, {}_{(\sigma_2)}\mu_{k_2} \ldots {}_{(\sigma_r)}\mu_{k_r}\, {}_{(\tau_2)}\lambda^{i_2} \ldots {}_{(\tau_s)}\lambda^{i_s}.$$

Das Resultat der Verjüngung ist demnach ein Tensor, dessen kovariante wie kontravariante Stufenzahl um je eins verringert ist. Multiplikation und darauffolgende Verjüngung des Produkttensors heißt „*innere Multiplikation*" oder „*Überschiebung*".

Wir werden im folgenden allgemeiner eine Tensormultiplikation mit darauffolgender Summation über gleichbezeichnete Indizes eine Überschiebung nennen, auch wenn diese Indizes keinen tensoriellen Charakter haben, wie

$${}_{(\alpha)}\lambda^i\, {}_{(\alpha)}\mu_k \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n).$$

Aus der Darstellung (23) folgt weiter, daß es in $m$-Systemen sinnvoll ist, von $\varrho$fach stetig differenzierbaren Tensorkomponenten zu sprechen, wenn $\varrho \leqq m - 1$ ist.

Schließlich zeigt (23), daß es genau $n^a$ linear unabhängige gleichartige Tensoren $a$ter Stufe gibt. Für $r$fach kovariante, $s$fach kontravariante Tensoren ist

$$(25)\qquad {}_{(\sigma_1)}\mu_{k_1} \cdots {}_{(\sigma_r)}\mu_{k_r}\, {}_{(\tau_1)}\lambda^{i_1} \cdots {}_{(\tau_s)}\lambda^{i_s}$$

ein solches System von $n^{r+s}$ linear unabhängigen Tensoren. Wären sie nämlich linear abhängig, so müßte (23) mit $T^{i_1 \ldots i_s}_{k_1 \ldots k_r} = 0$ und nicht durchwegs verschwindenden ${}_{(\sigma_1 \ldots \sigma_r \tau_1 \ldots \tau_s)}T$ bestehen, was aber einen Widerspruch mit (22) ergäbe.

## § 6. Die Vektorräume eines Punktes $P$.

Wir haben im vorhergehenden vom $n$ dimensionalen kovarianten und kontravarianten Vektorraum eines Punktes $P$ des $R_n$ gesprochen. Man kann neben diesen auch Vektorräume in $P$ betrachten, deren Dimension kleiner als $n$ ist. Wir definieren[1]):

Eine Gesamtheit kontravarianter Vektoren eines Punktes $P$ heißt *kontravarianter Vektorraum* in $P$, wenn mit dem Vektor $x_i, \lambda^i$ auch der Vektor $x_i, \sigma\lambda^i$, wo $\sigma$ ein Skalar ist, und mit den beiden Vektoren $x_i, \lambda^i$ und $x_i, \mu^i$ auch der Vektor $x_i, \lambda^i + \mu^i$ zur Gesamtheit gehört. Der kontravariante Vektor-

1) Wir geben die Definition für kontravariante Vektorräume; die kovarianten Vektorräume und allgemeiner die Tensorräume (bestimmter Art) lassen sich in analoger Weise einführen.

raum ist also eine Gesamtheit kontravarianter Vektoren, in der die Multiplikation mit einem Skalar und die Addition ausführbar sind, d. h. wieder Vektoren der Gesamtheit ergeben.

Wir bringen zwei Beispiele:

1. Ist $t^{ik}$ ein kontravarianter Tensor zweiter Stufe in $P$, so bildet die Gesamtheit der Vektoren $\lambda^i = t^{ik}\varrho_k$, wo $\varrho_k$ ein beliebiger kovarianter Vektor des Punktes $P$ ist, einen kontravarianten Vektorraum in $P$, der im übrigen von dem ähnlich gebildeten Vektorraum $\mu^i = t^{ki}\varrho_k$ wohl zu unterscheiden ist. Die Gesamtheit der kovarianten, durch die Tensorrelation $t^{ik}\mu_k = 0$ definierten Vektoren $\mu_k$ des Punktes $P$ bilden einen kovarianten Vektorraum, der wohl zu unterscheiden ist von dem durch $t^{ki}\mu_k = 0$ definierten.

2. Sind $\lambda^i, \mu^i, \ldots, \varepsilon^i$ eine endliche Anzahl kontravarianter Vektoren in $P$, so wird durch sie ein Vektorraum „aufgespannt", dessen Elemente die Vektoren

$$\alpha\lambda^i + \beta\mu^i + \cdots + \tau\varepsilon^i$$

sind, wobei $\alpha, \beta, \ldots, \tau$ Skalare bedeuten.

Es sei $V$ ein kontravarianter Vektorraum in $P$. Aus ihm greifen wir einen Vektor $\lambda^i$ heraus. Die Gesamtheit der Vektoren $\alpha\lambda^i$, wobei $\alpha$ ein beliebiger Skalar ist, bilden dann selbst einen Vektorraum, der ganz in $V$ liegt, also einen Unterraum oder Teilraum von $V$, den wir mit $\{\alpha\lambda^i\}$ bezeichnen. Dann ist entweder $V$ mit dem Unterraum $\{\alpha\lambda^i\}$ identisch, oder es gibt in $V$ einen Vektor $\mu^i$, der diesem Unterraum nicht angehört (d. h. dann, daß $\lambda^i$ und $\mu^i$ linear unabhängig sind). Die Vektoren $\alpha\lambda^i + \beta\mu^i$, wo $\alpha, \beta$ Skalare sind, spannen dann wieder einen Unterraum $\{\alpha\lambda^i + \beta\mu^i\}$ von $V$ aus, der entweder mit $V$ identisch ist oder nicht; im letzteren Fall gibt es einen dritten Vektor $\nu^i$ in $V$, der der Gesamtheit $\alpha\lambda^i + \beta\mu^i$ nicht angehört, d. h. $\lambda^i$, $\mu^i$ und $\nu^i$ sind linear unabhängig. Auf diese Art gelangen wir nach $r$ Schritten zu $r \leqq n$ *linear unabhängigen Vektoren* des Vektorraumes $V$ in $P$:

$${}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i, \ldots, {}_{(r)}\lambda^i,$$

so daß $V$ mit dem Vektorraum $\{\alpha_1 {}_{(1)}\lambda^i + \alpha_2 {}_{(2)}\lambda^i + \cdots + \alpha_r {}_{(r)}\lambda^i\}$, wo wieder $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ Skalare sind, identisch ist. Der Vektorraum hat dann die *Dimension* $r$ und wird mit $V^{(r)}$ bezeichnet. Wir zeigen, daß $r$ von der besonderen Wahl der Vektoren ${}_{(\sigma)}\lambda^i$ unabhängig ist. Hat man nämlich auf irgendeine Art $\varrho$ linear unabhängige Vektoren ${}_{(1)}\bar{\lambda}^i, \ldots, {}_{(\varrho)}\bar{\lambda}^i$ gefunden, durch die ebenfalls jeder Vektor von $V$ linear dargestellt wird, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} &(1) \qquad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha\beta)}l\, {}_{(\beta)}\lambda^i \\ &(2) \qquad {}_{(\beta)}\lambda^i = {}_{(\alpha\beta)}k\, {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \varrho;\ \beta = 1, 2, \ldots, r).$$

Aus (1) folgt, daß die Matrix $\| {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i \|$ keinen höheren, aus (2), daß sie keinen niedrigeren Rang als die Matrix $\| {}_{(\alpha)}\lambda^i \|$ hat[1]); also ist der Rang der Matrizen gleich, und da $\| {}_{(\alpha)}\lambda^i \|$ nach Voraussetzung den Rang $r$ hat, so hat auch $\| {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i \|$ diesen Rang, d. h., es muß, da die Vektoren ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i (\alpha = 1, \ldots, \varrho)$ unabhängig sind, $r = \varrho$ sein, w. z. b. w.

Zwischen den „*r-Beinen*" ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i$ und ${}_{(\alpha)}\lambda^i$, die den Vektorraum $V$ aufspannen, besteht also stets eine Relation von der Form

$$(3) \qquad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha\beta)}l\, {}_{(\beta)}\lambda^i, \quad | {}_{(\alpha\beta)}l | \neq 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r).$$

Wir betrachten nun den Vektorraum $V$ des ersten Beispiels. Es sei $r$ der Rang des kontravarianten Tensors zweiter Stufe $t^{ik}$, d. h. der Rang der Matrix $\| t^{ik} \|$. Dann hat der kontravariante Vektorraum $V$ oder $\lambda^i = t^{ik} \varrho_k$, wobei $\varrho_k$ ein beliebiger kovarianter Vektor in $P$ ist, gerade die Dimension $r$. Sei nämlich ${}_{(\alpha)}\sigma_k$ ein kovariantes $n$-Bein in $P$, so folgt aus $\varrho_k = {}_{(\alpha)}\varrho\, {}_{(\alpha)}\sigma_k$, $\lambda^i = {}_{(\alpha)}\varrho\, t^{ik}\, {}_{(\alpha)}\sigma_k$, daß dieser Vektorraum durch die $n$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i = t^{ik}\, {}_{(\alpha)}\sigma_k$ aufgespannt wird. Wegen $| {}_{(\alpha)}\sigma_k | \neq 0$ hat aber $\| {}_{(\alpha)}\lambda^i \|$ denselben Rang wie $t^{ik}$, also den Rang $r$. Unter den $n$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ gibt es also $r$ unabhängige, somit hat $V$ die Dimension $r$. Der durch $t^{ik} \mu_k = 0$ definierte kovariante Vektorraum in $P$ hat dagegen, da $\| t^{ik} \|$ den Rang $r$ hat, die Dimension $n - r$.

Wir erhalten also als wichtiges Teilresultat: *Ist $t^{ik}$ ein Tensor zweiter Stufe, so ist der Rang der Matrix $\| t^{ik} \|$ eine Invariante, d. h. vom Koordinatensystem unabhängig.* Entsprechendes gilt von kovarianten Tensoren $t_{ik}$.

Es sei $V^{(r)}$ ein $r$ dimensionaler kontravarianter Vektorraum in $P$; die Gesamtheit der kovarianten Vektoren $\xi_i$ in $P$, die zu allen Vektoren $\eta^i$ des $V^{(r)}$ *normal stehen*, d. h. der Relation $\xi_i \eta^i = 0$ genügen, bildet dann einen $n - r$-dimensionalen kovarianten Vektorraum $V_{(n-r)}$. Ist nämlich ${}_{(\alpha)}\lambda^i (\alpha = 1, \ldots, r)$ ein den $V^{(r)}$ aufspannendes $r$-Bein, so ist der $V_{(n-r)}$ durch die Tensorrelation

$$(4) \qquad {}_{(\alpha)}\lambda^i \xi_i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

definiert. Nun steht jeder Vektor $\eta^i$ des $V^{(r)}$ definitionsgemäß auf jedem Vektor des $V_{(n-r)}$ normal; aber noch mehr: der Vektorraum $V^{(r)}$ läßt sich umgekehrt durch die Gesamtheit der auf den Vektoren des $V_{(n-r)}$ normal stehenden kontravarianten Vektoren definieren.

Die Beziehung zwischen den Vektorräumen $V^{(r)}$ und $V_{(n-r)}$ ist also wechselseitig; wir nennen den einen den *Normalvektorraum* des anderen.

In der Tat, steht $\eta^i$ auf allen Vektoren des $V_{(n-r)}$ normal, ist also $\eta^i \xi_i = 0$ eine Folge von ${}_{(\alpha)}\lambda^i \xi_i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$, so gilt $\eta^i = {}_{(\alpha)}\eta\, {}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$. Dies geht aus folgender Überlegung hervor: Die Gleichungen (4) haben genau

1) Da der Rang eines Produktes zweier Matrizen nicht größer sein kann als der Rang eines Faktors.

$n-r$ linear unabhängige Lösungen ${}_{(\alpha)}\xi_i$ $(\alpha=1,\ldots,n-r)$, so daß jeder dem Gleichungssystem (4) genügende Vektor $\xi_i$ die Darstellung $\xi_i = {}_{(\alpha)}\xi\,{}_{(\alpha)}\xi_i$ $(\alpha=1,\ldots,n-r)$ hat. Jeder den Gleichungen

(5) $$ {}_{(\alpha)}\xi_i\eta^i = 0 \qquad (\alpha=1,\ldots,n-r)$$

genügende Vektor $\eta^i$ erfüllt demnach auch die Gleichungen ${}_{(\alpha)}\xi\,{}_{(\alpha)}\xi_i\,\eta^i = = \xi_i\eta^i = 0$, wo $\xi_i$ ein beliebiger den Gleichungen (4) genügender Vektor ist. Nun hat aber (5) genau $r$ unabhängige Lösungen ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha=1,\ldots,r)$, also ist jeder (5) genügende Vektor $\eta^i = {}_{(\alpha)}\eta\,{}_{(\alpha)}\lambda^i$, w. z. b. w.

Wir betrachten nun wieder in $P$ den durch

(6) $$\lambda^i = t^{ik}\sigma_k$$

definierten $V^{(r)}$. Die Matrix $\|t^{ik}\|$ habe also den Rang $r$. Der kovariante Normalvektorraum $V_{(n-r)}$ ist dann durch $t^{ki}\varrho_k = 0$ definiert, da $\lambda^i\varrho_i = t^{ik}\sigma_k\varrho_i$ bei beliebigem Vektor $\sigma_k$ nur für $t^{ik}\varrho_i = 0$ verschwindet.

Die Tensorrelation (6) hat bei gegebenem Vektor $\lambda^i$ dann und nur dann einen Lösungsvektor $\sigma_k$, wenn $\lambda^i$ ein Vektor des $V^{(r)}$ ist, also mit anderen Worten, wenn $\lambda^i$ auf dem $V_{(n-r)}$ normal steht. Ist ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha=r+1,\ldots,n)$ ein diesen $V_{(n-r)}$ aufspannendes $(n-r)$-Bein, so gilt

(7) $$t^{ki}\,{}_{(\alpha)}\mu_k = 0$$

und (6) hat dann und nur dann einen Lösungsvektor $\sigma_k$, wenn $\lambda^i\,{}_{(\alpha)}\mu_i = 0$ $(\alpha=r+1,\ldots,n)$ gilt. In diesem Fall gibt es einen Lösungsvektor $\sigma_k$ von (6), der aber, abgesehen vom Fall $r=n$, nicht eindeutig ist. Sind $\sigma_k$ und $\bar\sigma_k$ zwei Lösungsvektoren, gilt also

$$\lambda^i = t^{ik}\sigma_k = t^{ik}\bar\sigma_k,$$

so folgt für $\sigma_k - \bar\sigma_k = \varrho_k$ die Relation

(8) $$t^{ik}\varrho_k = 0.$$

Der Lösungsvektor ist also dann bestimmt bis auf einen additiven Vektor des durch (8) definierten kovarianten $(n-r)$ dimensionalen Vektorraumes $\bar V_{(n-r)}$.

*Soll also (6) bei vorgegebenem $\lambda^i$ einen Lösungsvektor $\sigma_k$ haben, so muß $\lambda^i$ auf dem durch $t^{ki}\mu_k = 0$ definierten kovarianten Vektorraum $V_{(n-r)}$ normal stehen. Dann ist $\sigma_k$ bis auf einen additiven Vektor des durch $t^{ik}\varrho_k = 0$ definierten kovarianten Vektorraumes $\bar V_{(n-r)}$ bestimmt.*

## § 7. Die Plückerschen Tensoren eines Vektorraumes.

Es sei der $r$dimensionale Vektorraum $V^{(r)}$ in $P$ durch die $r$ Vektoren $_{(\alpha)}\lambda^i (\alpha = 1, \ldots, r)$ aufgespannt.

Mit $T^{i_1 \cdots i_r}$ bezeichnen wir den Tensor $r$ter Stufe in $P$

$$(1) \qquad T^{i_1 \cdots i_r} = \begin{vmatrix} _{(1)}\lambda^{i_1} & _{(1)}\lambda^{i_2} & \ldots & _{(1)}\lambda^{i_r} \\ _{(2)}\lambda^{i_1} & _{(2)}\lambda^{i_2} & \ldots & _{(2)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ _{(r)}\lambda^{i_1} & _{(r)}\lambda^{i_2} & \ldots & _{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix},$$

den wir den *Plückerschen Tensor des Vektorraumes* $V^{(r)}$ nennen.[1])

Beim Übergang zu einem zweiten den $V^{(r)}$ aufspannenden $r$-Bein

$$(2) \qquad _{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha\beta)}l\, _{(\beta)}\lambda^i, \quad l = |_{(\alpha\beta)}l| \neq 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$$

erhalten wir

$$\bar{T}^{i_1 \cdots i_r} = l\, T^{i_1 \cdots i_r}.$$

Der Plückersche Tensor ist also bis auf einen Faktor durch den Vektorraum $V^{(r)}$ bestimmt. Seine Komponenten bezeichnen wir als die homogenen Koordinaten des $V^{(r)}$; sie bestimmen ihrerseits den $V^{(r)}$ eindeutig, da der $V^{(r)}$ durch $T^{i_1 \cdots i_r}\, _{(2)}\sigma_{i_2} \cdots {}_{(r)}\sigma_{i_r} = \varrho^{i_1}$ definiert werden kann ($_{(2)}\sigma_i, \ldots, {}_{(r)}\sigma_i$ beliebig).

Die Plückerschen Tensoren sind schiefsymmetrisch (alternierend), d. h. bei Vertauschung zweier Indizes ändern die Komponenten das Vorzeichen (vgl. § 8B). Wir wollen jetzt die Frage beantworten, wann umgekehrt ein schiefsymmetrischer Tensor ein Plückerscher Tensor ist, und erledigen zuerst den Fall des Tensors zweiter Stufe. Sei in $P$ durch zwei Vektoren $\lambda_i, \mu_i$ der kovariante Vektorraum $V_{(2)} = \{\lambda_i, \mu_i\}$ aufgespannt. Sein Plückerscher Tensor hat die Komponenten

$$(3) \qquad t_{ik} = \lambda_i \mu_k - \lambda_k \mu_i.$$

Aus der Identität

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} \lambda_i & \lambda_j & \lambda_k & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_j & \mu_k & \mu_l \\ \lambda_i & \lambda_j & \lambda_k & \lambda_l \\ \mu_i & \mu_j & \mu_k & \mu_l \end{vmatrix} = 0$$

erhalten wir

$$(5) \qquad t_{ij} t_{kl} + t_{ik} t_{lj} + t_{il} t_{jk} = 0$$

1) Die Bezeichnung ist in Analogie zu den Plückerschen Linienkoordinaten gewählt; historisch richtiger wäre es vielleicht, von Grassmannschen Tensoren zu sprechen. — Die im I. Band viel verwendeten $\varepsilon$-Tensoren sind spezielle Plückersche Tensoren.

als notwendige Relationen, die ein PLÜCKERscher Tensor zweiter Stufe $t_{ik}$ zu erfüllen hat. Den einfachen Nachweis, daß ein Tensor, für den (5) gilt, notwendig schiefsymmetrisch ist, überlassen wir dem Leser.[1])

Wir behaupten, daß ein Tensor $t_{ik}$ ein PLÜCKERscher Tensor ist, wenn (5) gilt, d. h. daß die Bedingungen (5) auch hinreichend sind. Wir setzen zum Beweis

(6) $$p_i = t_{ir} a^r, \quad q_i = t_{is} b^s,$$

wo $a^i$ und $b^i$ zwei erst später festzulegende kontravariante Vektoren seien. Wir bilden dann den PLÜCKERschen Tensor des durch $p_i$ und $q_i$ aufgespannten Vektorraumes $V_{(2)}$

$$p_i q_k - p_k q_i = (t_{ir} t_{ks} - t_{is} t_{kr}) a^r b^s$$

und daraus wegen (5) und $t_{ik} = -t_{ki}$

(7) $$p_i q_k - p_k q_i = (t_{ir} t_{ks} + t_{is} t_{rk}) a^r b^s = -t_{ik} t_{sr} a^r b^s = \pi^{-1} t_{ik},$$

wo $\pi^{-1} = -t_{sr} a^r b^s$ gesetzt ist. Da $t_{sr}$ nicht identisch verschwinden soll, kann man die zwei Vektoren $a^i$ und $b^i$ stets so bestimmen, daß $\pi^{-1} \neq 0$ wird. Dann gilt aber

(8) $$t_{ik} = \pi(p_i q_k - p_k q_i) = p_i \bar{q}_k - p_k \bar{q}_i,$$

wo $\bar{q}_i = \pi q_i$ ist, d. h. $t_{ik}$ ist in der Tat ein PLÜCKERscher Tensor.

Wir gehen nun an die Erledigung derselben Aufgabe für alternierende Tensoren dritter Stufe. Die dabei nötigen Überlegungen führen ganz entsprechend auch im allgemeinen Fall, d. i. bei Tensoren beliebiger Stufe zum Ziel.

Es sei $V_{(3)}$ ein durch drei kovariante Vektoren $a_i$, $b_i$ und $c_i$ in $P$ aufgespannter Vektorraum. Sein PLÜCKERscher Tensor hat die Komponenten

(9) $$t_{ikl} = \begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l \\ b_i & b_k & b_l \\ c_i & c_k & c_l \end{vmatrix}.$$

Es sei nun $p^{kl}$ ein beliebiger Tensor in $P$. Dann ist

(10) $$\varrho_i = t_{ikl} p^{kl} = \alpha a_i + \beta b_i + \gamma c_i$$

und somit

(11) $$-\begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k & a_l \\ b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ \varrho_i & \varrho_j & \varrho_k & \varrho_l \end{vmatrix} = \varrho_i t_{jkl} - \varrho_j t_{kli} + \varrho_k t_{lij} - \varrho_l t_{ijk} = 0.$$

Setzt man hier für $\varrho_i = t_{irs} p^{rs}$ ein, so erhält man infolge der Willkür des Tensors $p^{rs}$

1) Man setze in (5) $j = k = l$ und hierauf $k = l$.

(12) $$t_{jkl}t_{irs} - t_{kli}t_{jrs} + t_{lij}t_{krs} - t_{ijk}t_{lrs} = 0$$

als notwendige Bedingungen.

Wir zeigen wieder, daß die Gleichungen (12) auch hinreichend sind, damit ein alternierender Tensor $t_{ikl}$ ein Plückerscher Tensor ist. Setzen wir

(13) $$t_{ikl}d^i = b_{kl}, \quad t_{ikl}c^{kl} = a_i,$$

wo $c^{kl}$ und $d^i$ vorläufig noch unbestimmte Tensoren sind, so ist $b_{kl}$ bereits ein Plückerscher Tensor; überschieben wir nämlich (12) mit $d^l d^s$, so erhalten wir

(14) $$b_{jk}b_{ir} + b_{ki}b_{jr} + b_{ij}b_{kr} = 0.$$

Also gilt $$b_{kl} = \varrho_k\sigma_l - \varrho_l\sigma_k.$$

Nun bilden wir den Plückerschen Tensor

(15) $$\begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l \\ \varrho_i & \varrho_k & \varrho_l \\ \sigma_i & \sigma_k & \sigma_l \end{vmatrix} \begin{aligned} &= a_i b_{kl} + a_k b_{li} + a_l b_{ik} = (t_{ipq}t_{rkl} + t_{kpq}t_{rli} + t_{lpq}t_{rik})c^{pq}d^r \\ &= (t_{rkl}t_{ipq} - t_{kli}t_{rpq} + t_{lir}t_{kpq} - t_{irk}t_{lpq} + t_{kli}t_{rpq})c^{pq}d^r \\ &= t_{kli}t_{rpq}c^{pq}d^r = \pi^{-1}t_{kli}. \end{aligned}$$

Setzt man $c^{pq} = c^p f^q$, so wird $\pi^{-1} = t_{rpq}c^p f^q d^r$, und es kann, sobald $t_{rpq}$ nicht identisch verschwindet, $c^p$, $f^q$, $d^r$ so gewählt werden, daß $\pi^{-1} \neq 0$ wird. Dann gilt aber

$$t_{ikl} = \pi \begin{vmatrix} a_i & a_k & a_l \\ \varrho_i & \varrho_k & \varrho_l \\ \sigma_i & \sigma_k & \sigma_l \end{vmatrix}.$$

Im $R_4$ gibt es nur eine nicht triviale Relation, der ein alternierender Tensor $t_{ik}$ zu genügen hat, wenn er ein Plückerscher Tensor sein soll, nämlich

(16) $$t_{12}t_{34} + t_{13}t_{42} + t_{14}t_{23} = 0.$$

Ist dann $a_{ik}$ ein beliebiger schiefsymmetrischer Tensor, so kann man $a_{ik}$ auf unendlich viele Arten als Summe zweier Plückerschen Tensoren darstellen; man zeige dies unter Verwendung von (16).

Es gilt der allgemeine Satz, daß sich im $R_n$ jeder alternierende Tensor $t_{ik}$ $2r$ter Stufe (der Rang einer schiefsymmetrischen Matrix $\|t_{ik}\|$ ist stets gerade!) als Summe von $r$ Plückerschen Tensoren darstellen läßt.[1])

## § 8. Bemerkungen und Beispiele zur Tensoralgebra.

**A. Koordinaten im $R_n$.** Sind $n$ $m$fach stetig differenzierbare Funktionen der Punkte des $R_n$

(1) $$\Phi_1(P),\ \Phi_2(P),\ \ldots,\ \Phi_n(P)$$

1) Einen Beweis gab H. Hornich, ein Hörer des Verfassers. Zu dem vorstehenden vgl. auch J. Lense, Monatshefte f. Math. u. Phys. 30 (1921), S. 155—157.

gegeben, so ordnen sie jedem Punkt $P$ ein Zahlen-$n$-tupel $x_i = \Phi_i(P)$ zu. Ist in dem betrachteten Teilgebiet des $R_n$ die so definierte Zuordnung der Punkte und Zahlen-$n$-tupel ein-eindeutig, so sind die $x_i = \Phi_i(P)$ Koordinaten eines $m$-Systems in diesem Teilgebiet, z. B. kann man im physikalischen $R_3$ als solche irgend drei voneinander unabhängige Skalare wählen (Temperatur, Potential, Entfernung von einem Fixpunkt u. dgl.[1])

**B. Symmetrische und alternierende Tensoren.** Wir zeigen, daß es sinnvoll ist, von symmetrischen und schiefsymmetrischen oder alternierenden Tensoren zu sprechen. Gilt nämlich in einem Punkt $P$ und in irgendeinem zulässigen Koordinatensystem $g_{ik} - g_{ki} = 0$ bzw. $g_{ik} + g_{ki} = 0$, so gilt diese Relation auch in jedem anderen zulässigen Koordinatensystem. Denn mit $g_{ik}$ ist auch $h_{ik} = g_{ki}$ das Koeffizientensystem einer invarianten Linearform zweier willkürlicher kontravarianter Vektoren. Somit sind die $h_{ik}$ die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe, also $g_{ik} - h_{ik} = 0$ bzw. $g_{ik} + h_{ik} = 0$ eine Tensorrelation, w. z. b. w.

Im übrigen folgt dies auch aus der Beindarstellung

$$g_{ik} = {}_{(\alpha\beta)}g \; {}_{(\alpha)}\mu_i \, {}_{(\beta)}\mu_k, \tag{2}$$

wo

$${}_{(\alpha\beta)}g = g_{ik} \, {}_{(\alpha)}\lambda^i \, {}_{(\beta)}\lambda^k$$

ist. Gilt ${}_{(\alpha\beta)}g = {}_{(\beta\alpha)}g$, so ist $g_{ik}$ symmetrisch, im Fall ${}_{(\alpha\beta)}g = -{}_{(\beta\alpha)}g$ ist $g_{ik}$ schiefsymmetrisch und umgekehrt.

Es ist ebenso sinnvoll von allgemeinen Tensoren mit gewissen Symmetrieeigenschaften zu sprechen, z. B. ist $T_{ikl} = T_{kli}$ eine sinnvolle Relation. Man zeige dagegen, daß $\beta_i^k = \beta_k^i$ im allgemeinen sinnlos ist.

**C. Adjungierte Tensoren.** Ist $t_{ik}$ ein Tensor zweiter Stufe vom Rang $n$, d. h., ist $|t_{ik}| \neq 0$, so existiert der *adjungierte* kontravariante Tensor zweiter Stufe $t^{ik}$, der durch die Tensorrelation

$$t_{ik} t^{il} = \delta_k^l \tag{3}$$

definiert ist. Da $|t_{ik}| \neq 0$ ist, kann man in einem zulässigen Koordinatensystem die Komponenten des Tensors $t^{il}$ eindeutig berechnen; (3) ist eine Tensorrelation, und daher genügt der Tensor $t^{ik}$ diesen Gleichungen in jedem zulässigen Koordinatensystem.

---

1) Was eine $m$fach stetig differenzierbare Funktion der Punkte eines $R_n$ genannt wird, ist letzten Endes Konvention. Ist man übereingekommen, aus der Gesamtheit aller Funktionen $n$ derartige auszuwählen, z. B. die $n$ Funktionen (1), so bestimmen diese jetzt die Gesamtheit der $\varrho$fach ($\varrho \leqq m$) stetig differenzierbaren Funktionen und die zulässigen $m$-Systeme.

Der so gewonnene adjungierte Tensor $t^{ik}$ von $t_{ik}$ ist symmetrisch, wenn $t_{ik}$ symmetrisch ist. In der Tat folgt aus (3)

$$t_{ki}t^{li} = \delta^l_k$$

so wie (4, 2) aus (4, 1); also gilt, wenn $t_{ik} = t_{ki}$ ist, auch

$$t_{ik}t^{li} = \delta^l_k.$$

Da $|t_{ik}| \neq 0$ ist, folgt daraus und aus (3) sofort $t^{il} = t^{li}$.

**D. Ein Satz über die Koeffizienten quadratischer Formen.** Ist $a_{ik}\varrho^i\varrho^k$ eine invariante quadratische Form eines beliebigen Vektors $x_i, \varrho^i$ eines Punktes $P(x_i)$, so ist $x_i, a_{ik} + a_{ki}$ ein Tensor zweiter Stufe in $P$.

Wir haben zu zeigen, daß $(a_{ik} + a_{ki})\varrho^i\sigma^k$ für beliebige Vektoren $\varrho^i$ und $\sigma^k$ des Punktes $P$ invariant ist, was unmittelbar aus der Identität

$$(4)\qquad a_{ik}(\varrho^i + \sigma^i)(\varrho^k + \sigma^k) - a_{ik}\varrho^i\varrho^k - a_{ik}\sigma^i\sigma^k = (a_{ik} + a_{ki})\varrho^i\sigma^k \quad \text{folgt.}$$

**E. Die Beindarstellung von Tensoren zweiter Stufe.** Es sei jetzt $t_{ik}$ ein kovarianter Tensor zweiter Stufe in $P$. Hat dann die Matrix $\|t_{ik}\|$ den Rang $r$, so ist nach § 6 durch

$$(5)\qquad \mu_i = t_{ik}\sigma^k,$$

wo $\sigma^k$ ein willkürlicher kontravarianter Vektor in $P$ ist, ein $r$ dimensionaler kovarianter Vektorraum $V_{(r)}$ definiert.

Es sei ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ ein diesen $V_{(r)}$ aufspannendes $r$-Bein. Wir ergänzen es durch geeignete weitere $n - r$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha = r + 1, \ldots, n)$ zu einem $n$-Bein, dessen adjungiertes mit ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ bezeichnet werde. Es gilt die Darstellung

$$(6)\qquad t_{ik} = {}_{(\alpha\beta)}t\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\beta)}\mu_k,$$

wo ${}_{(\alpha\beta)}t = t_{ik}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\beta)}\lambda^k$ ist. Nun ist $t_{ik}\,{}_{(\beta)}\lambda^k$ ein Vektor des $V_{(r)}$, also ist $t_{ik}\,{}_{(\beta)}\lambda^k = {}_{(\gamma)}a\,{}_{(\gamma)}\mu_i$ $(\gamma = 1, \ldots, r)$ und wegen ${}_{(\gamma)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = \delta_{\alpha\gamma}$ muß ${}_{(\alpha\beta)}t = 0$ sein, sobald $\alpha > r$ ist. Wir können also statt (6)

$$(7)\qquad t_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\nu_k \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

schreiben, wo ${}_{(\alpha)}\nu_k = {}_{(\alpha\beta)}t\,{}_{(\beta)}\mu_k$ $(\alpha = 1, \ldots, r;\ \beta = 1, \ldots, n)$ ist. In (7) sind die ${}_{(\alpha)}\nu_k$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ ebenfalls linear unabhängig. Im Fall der Abhängigkeit könnte man z. B. ${}_{(r)}\nu_k$ durch die übrigen linear darstellen; es wäre dann ${}_{(r)}\nu_k = {}_{(\alpha)}\nu\,{}_{(\alpha)}\nu_k$ $(\alpha = 1, \ldots, r - 1)$ und man erhielte somit statt (7) die Darstellung

$$(8)\qquad t_{ik} = \left({}_{(\alpha)}\mu_i + {}_{(\alpha)}\nu\,{}_{(r)}\mu_i\right){}_{(\alpha)}\nu_k \qquad (\alpha = 1, \ldots, r-1).$$

Dann wäre aber der $V_{(r)}$ bereits durch die $r - 1$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i + {}_{(\alpha)}\nu\,{}_{(r)}\mu_i$ $(\alpha = 1, \ldots, r - 1)$ aufgespannt.

**F. Die kanonische Darstellung des symmetrischen Tensors zweiter Stufe.** Es sei jetzt $t_{ik}$ symmetrisch und vom Rang $r$. Die Darstellung (6) gilt dann, wenn das $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ wie in E definiert ist, mit ${}_{(\alpha\beta)}t = 0$ für $\alpha > r$. Wegen ${}_{(\alpha\beta)}t = {}_{(\beta\alpha)}t$ ist hier aber ${}_{(\alpha\beta)}t = 0$ auch für $\beta > r$.

Die Determinante $|{}_{(\alpha\beta)}t|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$ ist nicht Null, da sonst nach (6) $t_{ik}$ einen kleineren Rang als $r$ hätte.

Wir bezeichnen mit $V^{(n-r)}$ den von den Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = r+1, \ldots, n)$ aufgespannten Normalvektorraum des schon oben definierten $V_{(r)} \equiv \{{}_{(\alpha)}\mu_i\}$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ und mit $V^{(r)}$ einen solchen Vektorraum $\{{}_{(\alpha)}\lambda^i\}$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$, daß ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ ein $n$-Bein ist. Wir ersetzen nun das $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ durch das zu ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ adjungierte, dessen $r$ erste Vektoren ja ebenfalls den $V_{(r)}$ aufspannen und das wir wieder mit ${}_{(\alpha)}\mu_i$ bezeichnen. Nun zeigen wir noch, daß die $r$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ im $V^{(r)}$ so gewählt werden können[1]), daß

$$(9) \qquad {}_{(r\alpha)}t = 0 \ (\alpha = 1, \ldots, r-1) \text{ und } {}_{(rr)}t = \pm 1 \quad \text{(nicht summieren über } r\text{!)}$$

ist.

Es muß im $V^{(r)}$ einen Vektor $\varrho^i$ geben, so daß $t_{ik}\varrho^i\varrho^k \neq 0$ ist. Denn jeder beliebige kontravariante Vektor $\sigma^i = {}_{(\alpha)}\sigma\,{}_{(\alpha)}\lambda^i$ läßt sich in einen Vektor $\varrho^i$ des $V^{(r)}$ und in einen Vektor $\tau^i$ des $V^{(n-r)}$ so zerlegen, daß $\sigma^i = \varrho^i + \tau^i$ gilt. Da aber $t_{ik}\tau^i = 0$ ist (Definition des $V^{(n-r)}$), so gilt $t_{ik}\sigma^i\sigma^k = t_{ik}\varrho^i\varrho^k$. Ist aber $r > 0$, so gibt es zumindest einen Vektor $\sigma^i$, für den $t_{ik}\sigma^i\sigma^k \neq 0$ gilt, und somit auch einen Vektor $\varrho^i$ derselben Eigenschaft. Ist also dann $\varrho^i$ der Vektor des $V^{(r)}$, für den $t_{ik}\varrho^i\varrho^k \neq 0$ ist, so setzen wir ${}_{(r)}\lambda^i = \sigma\varrho^i$ und bestimmen den Skalar $\sigma$ so, daß ${}_{(rr)}t = t_{ik}\,{}_{(r)}\lambda^i\,{}_{(r)}\lambda^k = \sigma^2 t_{ik}\varrho^i\varrho^k = \pm 1$ wird (es muß jedenfalls $\operatorname{sign}{}_{(rr)}t = \operatorname{sign} t_{ik}\varrho^i\varrho^k$ sein, weil $\sigma$ reell ist).

Um zu ${}_{(r\alpha)}t = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, r-1)$ zu gelangen, wählen wir im $V^{(r)}$ die $r$ unabhängigen Vektoren

$$\begin{cases} {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha)}a\,{}_{(r)}\lambda^i + {}_{(\alpha)}\lambda^i \\ {}_{(r)}\bar{\lambda}^i = {}_{(r)}\lambda^i \end{cases} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r-1)$$

und bestimmen die ${}_{(\alpha)}a$ aus

$$(10) \qquad 0 = t_{ik}\,{}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i\,{}_{(r)}\bar{\lambda}^k = \pm\,{}_{(\alpha)}a + t_{ik}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(r)}\lambda^k$$

in eindeutiger Weise. In der neuen Darstellung gilt dann (9).

Wir bilden jetzt den symmetrischen kovarianten Tensor

$$(11) \qquad \bar{t}_{ik} = t_{ik} - {}_{(rr)}t\,{}_{(r)}\mu_i\,{}_{(r)}\mu_k = {}_{(\alpha\beta)}t\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\beta)}\mu_k \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r-1)$$

---

1) Der $V^{(r)}$ ist in hohem Grade willkürlich. Er muß nur von $r$ Vektoren aufgespannt sein, die mit denen des $V^{(n-r)}$ den $V^{(n)}$ in $P$ aufspannen. Eine Änderung des $r$-Beins ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ im $V^{(r)}$ hat bei festem ${}_{(r+1)}\lambda^i, \ldots, {}_{(n)}\lambda^i$ natürlich eine Änderung der $r$ Vektoren ${}_{(\gamma)}\mu_i$ $(\gamma = 1, \ldots, r)$ des $V_{(r)}$ zur Folge: ${}_{(\gamma)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = \delta_{\gamma\alpha}$.

Da (11) nach ${}_{(\alpha\beta)}t$ auflösbar ist $({}_{(\alpha\beta)}t = \bar{t}_{ik\,(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\beta)}\lambda^k)$, ist der Rang von $\|\bar{t}_{ik}\|$ gleich dem Rang der Matrix $\|{}_{(\alpha\beta)}t\|\,(\alpha, \beta = 1, \ldots, r-1)$, also gleich $r-1$.

Ist $r = 1$, so ist $\bar{t}_{ik} = 0$, d. h., es gilt $t_{ik} = {}_{(11)}t\,{}_{(1)}\mu_{i\,(1)}\mu_k$ mit ${}_{(11)}t = \pm 1$. Gilt für $\varrho \leqq r-1$ die *kanonische Darstellung* eines Tensors $\tau_{ik}$ vom Range $\varrho$:

$$\tau_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} {}_{(\alpha\alpha)}\tau\,{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_{i\,(\alpha)}\bar{\mu}_k, \quad {}_{(\alpha\alpha)}\tau = \pm 1, \tag{12}$$

mit $\varrho$ unabhängigen Vektoren ${}'_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$, so folgt aus (11) die Richtigkeit der kanonischen Darstellung für $\varrho = r$. *Da sie für $r = 1$ richtig ist, so gilt sie demnach für beliebiges $r = 1, \ldots, n$.*

**G. Das Trägheitsgesetz der symmetrischen Tensoren.** Es seien

$$t_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{r} {}_{(\alpha\alpha)}t\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k = \sum_{\alpha=1}^{r} {}_{(\alpha\alpha)}\bar{t}\,{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i\,{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_k \tag{13}$$

zwei kanonische Darstellungen des symmetrischen Tensors zweiter Stufe $t_{ik}$ vom Rang $r$, in denen die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ bzw. ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ bereits so geordnet sind, daß

$$\begin{cases} {}_{(\alpha\alpha)}t = +1 & \text{für } \alpha = 1, \ldots, u \\ {}_{(\alpha\alpha)}t = -1 & \text{für } \alpha = u+1, \ldots, r \end{cases} \qquad \begin{cases} {}_{(\alpha\alpha)}\bar{t} = +1 & \text{fur } \alpha = 1, \ldots, v \\ {}_{(\alpha\alpha)}\bar{t} = -1 & \text{für } \alpha = v+1, \ldots, r \end{cases}$$

gelte. Das Trägheitsgesetz behauptet dann die Gleichheit von $u$ und $v$.

Ist $u \neq v$, z. B. $u - v > 0$, so betrachten wir im $V_{(r)}\{{}_{(\alpha)}\mu_i\}$ oder $\{{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i\}$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$[1]) den Vektorraum $M$, der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha = u+1, \ldots, r)$ und ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ $(\alpha = 1, \ldots, v)$ aufgespannt wird und dessen Dimension höchstens gleich $v + r - u = r - (u - v)$, also jedenfalls kleiner als $r$ ist. Der Vektorraum $M$ ist ein echter Unterraum des $V_{(r)}$; es gibt also mindestens einen kontravarianten Vektor $\varrho^i$, der auf allen Vektoren des Vektorraumes $M$, aber nicht auf allen Vektoren des Vektorraumes $V_{(r)}$ normal steht. Für ihn gilt

$$t_{ik}\varrho^i\varrho^k = \sum_{\alpha=1}^{u} {}_{(\alpha\alpha)}t\,({}_{(\alpha)}\mu_i\varrho^i)^2 = \sum_{\alpha=1}^{u} ({}_{(\alpha)}\mu_i\varrho^i)^2 > 0 \tag{14}$$

nach der ersten Darstellung (13), weil nicht alle ${}_{(\alpha)}\mu_i\varrho^i = 0$ sein können, da sonst $\varrho^i$ Normalvektor des $V_{(r)}$ wäre. Aus der zweiten Darstellung (13) folgt

1) Die Vektorräume $\{{}_{(\alpha)}\mu_i\}$ und $\{{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i\}$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ sind auch wegen (13) identisch. Aus (13) folgt nämlich, wenn man ${}_{(\alpha)}\mu_i$ zu einem $n$-Bein ergänzt, zu dem ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ das adjungierte ist,

$$ {}_{(\beta\beta)}t\,{}_{(\beta)}\mu_i = \sum_{\alpha=1}^{r} {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i\,({}_{(\alpha\alpha)}\bar{t}\,{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_{k\,(\beta)}\lambda^k) \qquad \text{(nicht summieren über } \beta!). $$

${}_{(\beta)}\mu_i$ ist also durch ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ dargestellt, und analog zeigt man, daß die ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ durch die ${}_{(\alpha)}\mu_i$ linear darstellbar sind.

(15) $$t_{ik}\varrho^i\varrho^k = \sum_{\alpha=v+1}^{r}{}_{(\alpha\alpha)}\bar{t}\,({}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i\varrho^i)^2 = -\sum_{\alpha=v+1}^{r}({}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i\varrho^i)^2 < 0,$$

was mit (14) verglichen einen Widerspruch ergibt. Also muß $u = v$ sein, w. z. b. w.

**H. Definite, halbdefinite und indefinite symmetrische Tensoren zweiter Stufe.** Es werde wieder die kanonische Darstellung des symmetrischen Tensors zweiter Stufe

$$t_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{r}{}_{(\alpha\alpha)}t\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k; \quad {}_{(\alpha\alpha)}t = \pm 1$$

betrachtet. Ergänzen wir die $r$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ zu einem kovarianten $n$-Bein und bezeichnen wir mit ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ das zu diesem adjungierte kontravariante $n$-Bein, so folgt aus den Formeln der Beindarstellung (13)

(16) $$\begin{cases} t_{ik}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\beta)}\lambda^k = 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \text{ und } \alpha > r \text{ oder } \beta > r \\ t_{ik}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\alpha)}\lambda^k = {}_{(\alpha\alpha)}t & (\alpha = 1, \ldots, r; \text{ über } \alpha \text{ nicht summieren!}). \end{cases}$$

Setzen wir $${}_{(\alpha)}\lambda_i = t_{ik}\,{}_{(\alpha)}\lambda^k \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

so folgt ${}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(\beta)}\lambda^i = 0$ mit Ausnahme von ${}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = \begin{Bmatrix}+1\\-1\end{Bmatrix}$, wenn $\begin{Bmatrix}{}_{(\alpha\alpha)}t = +1\\{}_{(\alpha\alpha)}t = -1\end{Bmatrix}$ ist. Es ist somit

(17) $${}_{(\alpha)}\lambda_i = \begin{Bmatrix}+\,{}_{(\alpha)}\mu_i\\-\,{}_{(\alpha)}\mu_i\end{Bmatrix} \qquad (\alpha = 1, \ldots, r),$$

wenn $\begin{Bmatrix}{}_{(\alpha\alpha)}t = +1\\{}_{(\alpha\alpha)}t = -1\end{Bmatrix}$ ist.

Die Tensoren $t_{ik}$, in deren kanonischer Darstellung alle ${}_{(\alpha\alpha)}t = +1$ bzw. alle ${}_{(\alpha\alpha)}t = -1$ sind, mögen für $r < n$ *halbdefinit*, für $r = n$ *definit* heißen, und zwar positiv halbdefinit bzw. definit, wenn ${}_{(\alpha\alpha)}t = +1$ ist, und negativ halbdefinit bzw. definit, wenn ${}_{(\alpha\alpha)}t = -1$ ist. Alle übrigen Tensoren $t_{ik}$ nennen wir *indefinit*. Ein symmetrischer, positiv halbdefiniter bzw. definiter Tensor $t_{ik}$ vom Range $r$ hat die kanonische Darstellung

(18) $$t_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k \qquad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

Sei nun $t_{ik} = {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i\,{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_k$ eine zweite kanonische Darstellung. Das zu ${}_{(\alpha)}\mu_i$ adjungierte $n$-Bein werde mit ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ und das zu ${}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i$ adjungierte mit ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i$ bezeichnet. Aus

(19) $${}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k = {}_{(\alpha)}\bar{\mu}_i\,{}_{(\alpha)}\bar{\mu}_k \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

erhalten wir durch Überschiebung mit ${}_{(\beta)}\bar{\lambda}^k$

(20) $${}_{(\beta)}\bar{\mu}_i = ({}_{(\alpha)}\mu_k\,{}_{(\beta)}\bar{\lambda}^k)\,{}_{(\alpha)}\mu_i = {}_{(\beta\alpha)}C\,{}_{(\alpha)}\mu_i \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r),$$

wobei die ${}_{(\beta\alpha)}C$ eine orthogonale Matrix bilden. Tatsächlich gilt

(21) $${}_{(\beta\alpha)}C\,{}_{(\gamma\alpha)}C = {}_{(\alpha)}\mu_k\,{}_{(\beta)}\bar{\lambda}^k\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\gamma)}\bar{\lambda}^i = t_{ik}\,{}_{(\beta)}\bar{\lambda}^k\,{}_{(\gamma)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\beta\gamma)}\bar{t} = \delta_{\beta\gamma}.$$

# II. Tensoranalysis.

## § 1. Die tensorielle Ableitung.

Die bisher betrachteten Operationen der Tensoralgebra, also Addition gleichartiger, Multiplikation und Verjüngung beliebiger Tensoren *eines* Punktes $P$ des $R_n$ sind *tensoriellen Charakters,* d. h. sie führen stets wieder zu Tensoren des Punktes $P$.

Ist dagegen z. B.

$$x_1(s), \ldots, x_n(s);\ \lambda^1(s), \ldots, \lambda^n(s) \tag{1}$$

ein in allen Punkten der stetig differenzierbaren Kurve $x_i = x_i(s)$ definierter, stetig differenzierbarer kontravarianter Vektor, so folgt aus seinen Transformationsformeln

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n);\ \bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \lambda^k \tag{2}$$

durch Differentiation nach $s$ das Transformationsgesetz

$$\frac{d\bar{\lambda}^i}{ds} = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{d\lambda^k}{ds} + \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} \frac{dx_l}{ds} \lambda^k \tag{3}$$

für die Ableitungen der Komponenten $\lambda^i$ des Vektors (1), die somit im allgemeinen nicht mehr die Komponenten eines Vektors sind.[1])

Es wird daher von Wichtigkeit sein, eine die gewöhnliche Ableitung ersetzende *tensorielle Ableitung* zu definieren, was im folgenden mit Hilfe eines in allen Punkten des $R_n$ definierten $n$-Beins durchgeführt wird.

Es sei in allen Punkten des auf ein $m$-System (I, § 1) bezogenen $R_n$ das $m-1$ mal stetig differenzierbare kovariante $n$-Bein

$$x_i,\ {}_{(\alpha)}\mu_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{4}$$

gegeben.[2]) Nach Voraussetzung ist in jedem Punkt des $R_n$ die Determinante

$$|{}_{(\alpha)}\mu_i| \neq 0. \tag{5}$$

Durch die Tensorrelationen

$${}_{(\alpha)}\mu_{i\,(\beta)}\lambda^i = \delta_{\alpha\beta},\quad {}_{(\alpha)}\mu_{i\,(\alpha)}\lambda^k = \delta_i^k \tag{6}$$

---

1) Das ist nur dann der Fall, wenn $\dfrac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} = 0$ ist, also bei den affinen Transformationen $\bar{x}_i = a_{ik} x_k + b_i$. *Die Differentiation ist also nur innerhalb der affinen Gruppe ein tensorieller Prozeß.* (Die Überlegung gilt unverändert für beliebige Tensoren.)

2) Beispielsweise kann in einem bestimmten $m$-System ${}_{(\alpha)}\mu_i = \delta_{i\alpha}$ sein.

ist dann in allen Punkten des $R_n$ das zu (4) adjungierte kontravariante $n$-Bein

(7) $$x_i,\ {}_{(\alpha)}\lambda^i(x_1, \ldots, x_n)$$

definiert, und zwar sind die Komponenten ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ebenfalls $m-1$ mal stetig differenzierbar. Ferner sei durch

(8) $$x_i = x_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$$

eine stetig differenzierbare $l$ dimensionale Mannigfaltigkeit $F_l$ des $R_n$ und in allen ihren Punkten der stetig differenzierbare kontravariante Vektor

(9) $$x_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_l),\quad \varrho^i(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$$

gegeben. Dann kann man in den Punkten der $F_l$ die $n$ stetig differenzierbaren Skalare

(10) $${}_{(\alpha)}\mu_i\big(x_1(\sigma \ldots), \ldots, x_n(\sigma \ldots)\big)\,\varrho^i(\sigma \ldots) = {}_{(\alpha)}\Phi(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$$

bilden. ${}_{(\alpha)}\Phi$ hängt nur von den Punkten der $F_l(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$ ab und ist invariant in bezug auf die Transformation der Raumkoordinaten $x_1, \ldots, x_n$. Daher ist auch

(11) $$d_{(\alpha)}\Phi = \frac{\partial_{(\alpha)}\Phi}{\partial \sigma_h}\, d\sigma_h = {}_{(\alpha)}\mu_i\, d\varrho^i + \varrho^i\, \frac{\partial_{(\alpha)}\mu_i}{\partial x_k}\, dx_k \qquad (h=1, \ldots, l)$$

ein System von $n$ Invarianten. Durch Überschiebung von (11) mit ${}_{(\alpha)}\lambda^j$ ergibt sich wegen (6)

(12) $$d\varrho^j + \frac{\partial_{(\alpha)}\mu_i}{\partial x_k}\,{}_{(\alpha)}\lambda^j\,\varrho^i\, dx_k = {}_{(\alpha)}\lambda^j\, d_{(\alpha)}\Phi = \beta^j.$$

Setzen wir

(13) $$\frac{\partial_{(\alpha)}\mu_i}{\partial x_k}\,{}_{(\alpha)}\lambda^j = -\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,\frac{\partial_{(\alpha)}\lambda^j}{\partial x_k} = (i\,k,\, j),$$

so besagt (12), daß

(14) $$\boldsymbol{\beta^j = d\varrho^j + (i\,k,\, j)\,\varrho^i\, d\,x_k}$$

ein kontravarianter Vektor in den Punkten der $F_l$ ist. Wir nennen diesen, aus dem kontravarianten Vektor (9) und den $n$-Beinen (4) und (7) gebildeten kontravarianten Vektor das *tensorielle Differential des Vektors* (9); es hängt noch von dem im $R_n$ festgewählten $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i(x_1, \ldots, x_n)$ ab.

Ganz analog läßt sich das tensorielle Differential eines kovarianten Vektors bilden. Ist längs der $F_l$ (8) der stetig differenzierbare kovariante Vektor

(15) $$x_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_l),\ \tau_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$$

gegeben, so kann man wieder (dual zu (10)) die $n$ Skalare

(16) $${}_{(\alpha)}\lambda^i\big(x_1(\sigma \ldots), \ldots, x_n(\sigma \ldots)\big)\,\tau_i(\sigma \ldots) = {}_{(\alpha)}\Psi(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$$

bilden. Für den Skalar $d_{(\alpha)}\Psi$ gibt (16)

(17) $${}_{(\alpha)}\lambda^i\, d\tau_i + \tau_i\,\frac{\partial_{(\alpha)}\lambda^i}{\partial x_k}\, dx_k = d_{(\alpha)}\Psi,$$

woraus durch Überschiebung mit ${}_{(\alpha)}\mu_j$ wegen (13) und (6)

$$d\tau_j - (jk, i)\,\tau_i\,dx_k = \varepsilon_j \tag{18}$$

folgt, wo $x_i$, $\varepsilon_i$ ein kovarianter Vektor im betrachteten Punkt der $F_l$ ist. Ist der kontravariante Vektor (9) bzw. der kovariante (15) in einem Gebiete des $R_n$ (offene Punktmenge) definiert (d. h. ist die $F_l$ (8) ein Gebietsteil des $R_n$, also $l = n$), so sind die Komponenten dieser Vektoren nach Annahme in dem Gebiete stetig differenzierbare Funktionen der Koordinaten, und es gilt

$$d\varrho^j = \frac{\partial \varrho^j}{\partial x_k}\,dx_k \quad \text{bzw.} \quad d\tau_j = \frac{\partial \tau_j}{\partial x_k}\,dx_k.$$

Dann ist (14): $\beta^j = \left[\frac{\partial \varrho^j}{\partial x_k} + (ik, j)\varrho^i\right] dx_k$, und da $dx_k = \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_\tau}\,d\sigma_\tau$ $(\tau = 1, \ldots, n)$ wegen $\left|\frac{\partial x_k}{\partial \sigma_\tau}\right| \neq 0$ ein willkürlicher kontravarianter Vektor ist, muß

$$\frac{\partial \varrho^j}{\partial x_k} + (ik, j)\,\varrho^i = \beta^j_k \tag{19}$$

ein gemischter Tensor zweiter Stufe sein. Ebenso ist

$$\frac{\partial \tau_j}{\partial x_k} - (jk, i)\,\tau_i = \varepsilon_{jk} \tag{20}$$

ein kovarianter Tensor zweiter Stufe. Wir nennen $\beta^j_k$ bzw. $\varepsilon_{jk}$ *die tensorielle Ableitung* von $\varrho_j$ bzw. $\tau_j$ (bezüglich des $n$-Beines ${}_{(\alpha)}\mu_i$).

## § 2. Der Riccikalkül.

Wir denken uns längs einer stetig differenzierbaren $F_l$

$$x_i = x_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_l)$$

stetig differenzierbare Tensoren (die Komponenten sind stetig differenzierbare Funktionen von $\sigma_1, \ldots, \sigma_l$) beliebiger Stufe definiert, für die wir die tensorielle Ableitung durch das folgende System von Forderungen einführen; ist dabei $U^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ (die Punkte deuten Indizes an) ein solcher Tensor, so bezeichne $\mathfrak{d}\,U^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ sein tensorielles Differential.

Für das tensorielle Differential mögen die folgenden vier Gesetze gelten:

I. $\mathfrak{d}\varphi = d\varphi$, sobald $\varphi$ ein Skalar ist.

II. $\mathfrak{d}\varphi^j = d\varphi^j + (ik, j)\,\varphi^i dx_k$.

III. $\mathfrak{d}(U^{\cdot\cdot}_{\cdot} V^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}) = U^{\cdot\cdot}_{\cdot}\,\mathfrak{d}V^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} + V^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}\,\mathfrak{d}U^{\cdot\cdot}_{\cdot}$, wo $U^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ und $V^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ *beliebige* Tensoren sind.[1])

IV. $\mathfrak{d}(U^{\cdot\cdot}_{\cdot} + V^{\cdot\cdot}_{\cdot}) = \mathfrak{d}U^{\cdot\cdot}_{\cdot} + \mathfrak{d}V^{\cdot\cdot}_{\cdot}$, wo $U^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ und $V^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ *gleichartige* Tensoren sind.

1) III soll für jede Indizeskonstellation gelten, also auch dann, wenn einige der oberen Indizes gleich einigen unteren Indizes sind, und weiter auch dann, wenn über diese Indizes summiert wird (Verjüngung, vgl. S. 15 und 16).

Aus I bis III läßt sich das tensorielle Differential eines kovarianten Vektors berechnen. Sei $\mu_i$ ein bestimmter und $\lambda^i$ ein beliebiger, längs der $F_l$ definierter Vektor, so gilt, da $\lambda^i\mu_i$ ein Skalar ist, nach I

(1) $$\mathfrak{d}(\lambda^i\mu_i) = d(\lambda^i\mu_i) = \mu_i d\lambda^i + \lambda^i d\mu_i.$$

Weiter gilt nach III

(2) $$\mathfrak{d}(\lambda^i\mu_i) = \lambda^i\mathfrak{d}\mu_i + \mu_i\mathfrak{d}\lambda^i.$$

Aus (2) folgt, daß $\lambda^i\mathfrak{d}\mu_i$ eine Invariante, *also* $\mathfrak{d}\mu_i$ — da $\lambda^i$ beliebig ist — *ein kovarianter Vektor ist.* Setzen wir den Ausdruck für $\mathfrak{d}\lambda^i$ nach II in (2) ein, so finden wir

(2') $$\mu_i d\lambda^i + \lambda^i d\mu_i = \lambda^i\mathfrak{d}\mu_i + \mu_i(d\lambda^i + (pq, i)\lambda^p dx_q).$$

Somit gilt

(3) $$[\mathfrak{d}\mu_p - d\mu_p + (pq, i)\mu_i dx_q]\lambda^p = 0$$

oder, da $\lambda^p$ willkürlich ist,

(4) $$\mathfrak{d}\mu_p = d\mu_p - (pq, i)\mu_i dx_q.$$

*Das tensorielle Differential läßt, wie nochmals betont sei, den Tensorcharakter der Tensoren nullter und erster Stufe ungeändert.* Man vergleiche (4) mit (1,18).

Wir denken uns jetzt in jedem Punkte der $F_l$ den Tensor

(5) $$x_i(\sigma\ldots),\ T^{j_1 j_2\ldots j_s}_{i_1 i_2\ldots i_r}(\sigma\ldots)$$

gegeben, dessen Komponenten wir mittels der adjungierten $n$-Beine

(6) $$x_i(\sigma\ldots),\ {}_{(\alpha)}\tau_i(\sigma\ldots);\ x_i(\sigma\ldots),\ {}_{(\alpha)}\varrho^i(\sigma\ldots)$$

in bekannter Art

(7) $$T^{j_1 j_2\ldots j_s}_{i_1 i_2\ldots i_r} = {}_{(\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s)}T\,{}_{(\alpha_1)}\tau_{i_1}\cdots{}_{(\alpha_r)}\tau_{i_r}\,{}_{(\beta_1)}\varrho^{j_1}\cdots{}_{(\beta_s)}\varrho^{j_s}$$

darstellen. Wenn es eine den Regeln I bis IV genügende tensorielle Differentiation überhaupt gibt, so erhalten wir $\mathfrak{d}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$, wenn wir die rechte Seite nach den Regeln des gewöhnlichen Differentials (III und IV) behandeln. Da wir die Operation $\mathfrak{d}(\,)$, auf Tensoren bis zur ersten Stufe einschließlich ausgeübt, bereits kennen, erhalten wir auf der rechten Seite einen bekannten Ausdruck, *und da der Tensorcharakter der Tensoren bis zur ersten Stufe einschließlich durch das tensorielle Differential nicht berührt wird, so gilt dies für den allgemeinen Tensor* $T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}$.

Wir gehen nun an die Berechnung des tensoriellen Differentials $\mathfrak{d}T^{j_1 j_2\ldots j_s}_{i_1 i_2\ldots i_r}$ und erhalten bei Berücksichtigung der Regeln I bis IV und der daraus abgeleiteten Relation (4)

(8) $$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{d}T^{j_1 j_2\ldots j_s}_{i_1 i_2\ldots i_r} &= {}_{(\alpha_1)}\tau_{i_1}\cdots{}_{(\alpha_r)}\tau_{i_r}\,{}_{(\beta_1)}\varrho^{j_1}\cdots{}_{(\beta_s)}\varrho^{j_s}\,d_{(\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s)}T\\&+{}_{(\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s)}T\,{}_{(\alpha_2)}\tau_{i_2}\cdots{}_{(\alpha_r)}\tau_{i_r}\,{}_{(\beta_1)}\varrho^{j_1}\cdots{}_{(\beta_s)}\varrho^{j_s}[d_{(\alpha_1)}\tau_{i_1} - (i_1 q, p)_{(\alpha_1)}\tau_p dx_q]\\&+\cdots\\&+{}_{(\alpha_1\ldots\alpha_r\beta_1\ldots\beta_s)}T\,{}_{(\alpha_1)}\tau_{i_1}\cdots{}_{(\alpha_r)}\tau_{i_r}\,{}_{(\beta_1)}\varrho^{j_1}\cdots{}_{(\beta_{s-1})}\varrho^{j_{s-1}}[d_{(\beta_s)}\varrho^{j_s} + (pq, j_s)_{(\beta_s)}\varrho^p dx_q].\end{aligned}\right.$$

Fassen wir zusammen, so lautet (8) wegen (7)

$$(9)\begin{cases} \mathfrak{d}\, T^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r} = d\, T^{j_1 j_2 \ldots j_s}_{i_1 i_2 \ldots i_r} \\ \quad - d x_q \left\{ (i_1 q, p) T^{j_1 \ldots j_s}_{p i_2 \ldots i_r} + (i_2 q, p) T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 p i_3 \ldots i_r} + \cdots + (i_r q, p) T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_{r-1} p} \right\} \\ \quad + d x_q \left\{ (p q, j_1) T^{p j_2 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} + (p q, j_2) T^{j_1 p j_3 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} + \cdots + (p q, j_s) T^{j_1 \ldots j_{s-1} p}_{i_1 \ldots i_r} \right\}. \end{cases}$$

Der Ausdruck $\mathfrak{d}\, T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$, der nach (8) ein Tensor derselben Art wie $T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ ist, enthält die zu seiner Aufstellung verwendeten $n$-Beine (6) nicht mehr. Es bleibt nur mehr die Erledigung der Frage, ob dieses tensorielle Differential nun wirklich die Gesetze I bis IV erfüllt. Für die Gesetze I, II und IV gilt dies ohne weiteres (I ist nach Definition $\mathfrak{d}\varphi = d\varphi$ erfüllt). Was das Gesetz III betrifft, so sei

$$(10) \qquad S^{l_1 \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u} = {}_{(\gamma_1 \ldots \gamma_u \delta_1 \ldots \delta_v)}S \; {}_{(\gamma_1)}\tau_{k_1} \cdots {}_{(\gamma_u)}\tau_{k_u} \; {}_{(\delta_1)}\varrho^{l_1} \cdots {}_{(\delta_v)}\varrho^{l_v}$$

die Beindarstellung eines zweiten, in den Punkten der $F_l$ definierten, stetig differenzierbaren Tensors. Dann hat der Produkttensor

$$(11) \qquad T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} S^{l_1 \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u}$$

als Beindarstellung (durch die $n$-Beine (6)) die Produkte der Beindarstellungen (7) und (10). Wir erhalten nun $\mathfrak{d}(T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} S^{l_1 \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u})$, wenn wir diese Beindarstellung nach den Regeln der üblichen Differentiation (III und IV) behandeln, wobei dann die einzelnen Summanden so geordnet werden können, daß

$$(12) \qquad \mathfrak{d}\left(T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} S^{l_1 \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u}\right) = T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}\, \mathfrak{d} S^{l_1 \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u} + S^{l_1 \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u}\, \mathfrak{d} T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$$

wird. Die Relation (12) gilt für beliebige Indizeskonstellationen (vgl. die Fußnote S. 31), also ist beispielsweise auch

$$(12') \begin{cases} \mathfrak{d}\left(T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_h i_{h+1} \ldots i_r} S^{i_1 \ldots i_h l_{h+1} \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u}\right) \\ \quad = T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_h i_{h+1} \ldots i_r}\, \mathfrak{d} S^{i_1 \ldots i_h l_{h+1} \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u} + S^{i_1 \ldots i_h l_{h+1} \ldots l_v}_{k_1 \ldots k_u}\, \mathfrak{d} T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_h i_{h+1} \ldots i_r}, \end{cases}$$

wo in (12) $l_\sigma = i_\sigma$, $\sigma = 1, \ldots, h$ gesetzt wurde (Verjüngung).

*Es gibt also eine den Gesetzen* I *bis* IV *genügende Operation, die tensorielle Differentiation, und zwar ist diese Operation durch die genannten Gesetze in der Form* (9) *eindeutig bestimmt.*

Ist der Tensor $T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ in einem Gebiete des $R_n$ definiert, die $F_l$ also ein Raumstück des $R_n$ $(l = n)$, so gilt

$$(13) \qquad d T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = \frac{\partial T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x_q} d x_q,$$

wo $x_i$, $d x_i$ *ein beliebiger kontravarianter Vektor* des $R_n$ ist. Setzen wir (13) in (9) ein, so wird $\mathfrak{d}\, T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}$ eine Linearform der Vektorkomponenten $d x_q$, die wir in der Form

$$(14) \qquad \mathfrak{d}\, T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r} = \frac{\mathfrak{d}\, T^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_r}}{\mathfrak{d} x_q} d x_q$$

anschreiben. Das Koeffizientensystem der $dx_q$ in (14)

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{d} T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{\mathfrak{d} x_q} = \frac{\partial T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{\partial x_q} &- (i_1 q, p)\, T^{j_1\dots j_s}_{p\, i_2\dots i_r} - \cdots - (i_r q, p)\, T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{r-1} p} \\ &+ (p q, j_1)\, T^{p\, j_2\dots j_s}_{i_1\dots i_r} + \cdots + (p q, j_s)\, T^{j_1\dots j_{s-1} p}_{i_1\dots i_r} \end{aligned}\right.$$

ist dann das Komponentensystem eines $s$fach kontravarianten, $r+1$fach kovarianten Tensors $s+r+1$ ter Stufe. Wir nennen den Tensor $x_i, \frac{\mathfrak{d} T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}}{\mathfrak{d} x_q}$ *die tensorielle Ableitung des Tensors* $x_i,\ T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}$. Ist in einem $m$-System ein Tensor (d. h. seine Komponenten) $r$fach stetig differenzierbar ($r < m$), so ist seine tensorielle Ableitung $r-1$fach stetig differenzierbar.

Als wichtiges Beispiel für die tensorielle Ableitung behandeln wir die des kovarianten Tensors zweiter Stufe $t_{ik}$, der in einem Gebiete des $R_n$ stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Wir haben nach (15)

$$(16)\qquad \frac{\mathfrak{d} t_{ik}}{\mathfrak{d} x_j} = \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j} - (ij, \sigma)\, t_{\sigma k} - (kj, \sigma)\, t_{i\sigma}.$$

Nun bilden wir den Tensor

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{d} t_{ij}}{\mathfrak{d} x_k} + \frac{\mathfrak{d} t_{jk}}{\mathfrak{d} x_i} - \frac{\mathfrak{d} t_{ik}}{\mathfrak{d} x_j} = \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j} &- (ik, \sigma)\, t_{\sigma j} - (jk, \sigma)\, t_{i\sigma} \\ &- (ji, \sigma)\, t_{\sigma k} - (ki, \sigma)\, t_{j\sigma} + (kj, \sigma)\, t_{i\sigma} + (ij, \sigma)\, t_{\sigma k} \end{aligned}\right.$$

und spezialisieren das dem „Ableitungskalkül" zugrunde liegende $n$-Bein (1, 4) in folgender Weise: Wir wählen im $R_n$ $n$ unabhängige, $m$fach stetig differenzierbare Skalare

$$(18)\qquad {}_{(\alpha)}\Phi\,(x_1, \dots, x_n),$$

deren Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial\, {}_{(\alpha)}\Phi}{\partial x_i}\right|$ in keinem Punkte des $R_n$ verschwindet (z. B. die $n$ Koordinaten in einem $m$-System). Das $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ bestimmen wir dann durch

$$(19)\qquad {}_{(\alpha)}\mu_i = \frac{\partial\, {}_{(\alpha)}\Phi}{\partial x_i}.$$

Nach (1, 13) gilt dann[1])

$$(20)\qquad (ik, j) = (ki, j).$$

Schreiben wir die Tensorrelation (17) für das $n$-Bein (19) an, so gelten die Symmetriegesetze (20) und wir erhalten, wenn wir mit Christoffel

$$(21)\qquad \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial t_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_j} = 2\begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix}$$

---

1) Gilt umgekehrt (20), also ${}_{(\alpha)}\lambda^j \left[\frac{\partial\, {}_{(\alpha)}\mu_i}{\partial x_k} - \frac{\partial\, {}_{(\alpha)}\mu_k}{\partial x_i}\right] = 0$, so folgt aus $|\,{}_{(\alpha)}\lambda^j\,| \neq 0$, daß $\frac{\partial\, {}_{(\alpha)}\mu_i}{\partial x_k} = \frac{\partial\, {}_{(\alpha)}\mu_k}{\partial x_i}$ und somit ${}_{(\alpha)}\mu_k$ die Ableitung einer Funktion ${}_{(\alpha)}\Phi$ nach $x_k$ ist.

schreiben und $2\,T_{\sigma j} = t_{\sigma j} + t_{j\sigma}$ setzen, die Tensorrelation

$$\left[{ik \atop j}\right] - (ik, \sigma)\, T_{\sigma j} = \beta_{ikj}, \tag{22}$$

wo $\beta_{ikj}$ den Tensor auf der linken Seite von (17) bezeichnet (bis auf den Faktor $\frac{1}{2}$). Die $\left[{ik \atop j}\right]$ heißen *Christoffelklammern erster Art.* Wir setzen jetzt voraus, daß die Determinante des symmetrischen Tensors $T_{\sigma j}$

$$|T_{\sigma j}| \neq 0 \tag{23}$$

ist. Dann existiert der zu $T_{\sigma j}$ adjungierte symmetrische kontravariante Tensor zweiter Stufe $T^{j\tau}$, definiert durch die Tensorrelation

$$T_{\sigma j} T^{j\tau} = \delta_\sigma^\tau. \tag{24}$$

Durch Überschiebung von (22) mit $T^{j\tau}$ ergibt sich bei Einführung der *Christoffelklammern zweiter Art*

$$\left[{ik \atop j}\right] T^{j\tau} = \left\{{ik \atop \tau}\right\} \tag{25}$$

die fundamental wichtige Beziehung

$$\left\{{ik \atop \tau}\right\} - (ik, \tau) = \varepsilon_{ik}^\tau, \tag{26}$$

wo $\varepsilon_{ik}^\tau = \beta_{ikj} T^{j\tau}$ ist.

Führt man $(ik, \tau) = \left\{{ik \atop \tau}\right\} - \varepsilon_{ik}^\tau$ in (9) bzw. (15) ein, so erhalten wir als Resultat, daß

$$\left\{\begin{aligned} & dT_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} - dx_q \left[ \left\{{i_1 q \atop p}\right\} T_{p i_2 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} + \cdots + \left\{{i_r q \atop p}\right\} T_{i_1 \ldots i_{r-1} p}^{j_1 \ldots j_s} \right] \\ & \qquad + dx_q \left[ \left\{{p q \atop j_1}\right\} T_{i_1 \ldots i_r}^{p j_2 \ldots j_s} + \cdots + \left\{{p q \atop j_s}\right\} T_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_{s-1} p} \right] \end{aligned}\right. \tag{27}$$

ein Tensor der gleichen Art wie $T_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ ist, den wir *das absolute* oder *Riccidifferential* des Tensors $T_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$ nennen wollen, und daß

$$\left\{\begin{aligned} & \frac{\partial T_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}}{\partial x_q} - \left\{{i_1 q \atop p}\right\} T_{p i_2 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s} \cdots - \left\{{i_r q \atop p}\right\} T_{i_1 \ldots i_{r-1} p}^{j_1 \ldots j_s} \\ & \qquad + \left\{{p q \atop j_1}\right\} T_{i_1 \ldots i_r}^{p j_2 \ldots j_s} \cdots + \left\{{p q \atop j_s}\right\} T_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_{s-1} p} \end{aligned}\right. \tag{28}$$

ein Tensor ist, dessen (kovariante) Stufenzahl um eins größer ist als die von $T_{i_1 \ldots i_r}^{j_1 \ldots j_s}$, dessen *kovariante, absolute* oder *Ricciableitung* wir ihn nennen wollen.

Auf diese Tensoren (Riccidifferential, Ricciableitung) wären wir auch gestoßen, wenn im Axiomensysteme I bis IV statt II: $\mathfrak{d}\varrho^j = d\varrho^j + \left\{{ik \atop j}\right\} \varrho^i dx_k$ stünde.

Daraus folgt, daß *auch für das Riccidifferential die Gesetze* I *bis* IV *richtig sind*; in den Beweis, der für das „tensorielle Differential" geführt wurde, ging ja die besondere Form der Klammern $(ik, l)$ nicht ein.

# III. Der $n$ dimensionale Riemannsche Raum $R_n$.

## § 1. Einführung.

Ein $n$ dimensionaler Punktraum, wie wir ihn bisher betrachtet haben, heißt *Riemannscher Raum*, wenn in seinen Punkten ein *symmetrischer positiv definiter Tensor zweiter Stufe* $g_{ik}(x_1, \ldots, x_n)$ definiert ist, der als *Maßtensor* des Riemannschen $R_n$ bezeichnet wird. In den zugrunde gelegten $m$-Systemen (I, § 1) sei $g_{ik}$ $m-1$ fach stetig differenzierbar.

Nach I, § 8 hat $g_{ik}$ in jedem Punkte des $R_n$ die kanonische Darstellung

$$g_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i \, {}_{(\alpha)}\mu_k, \tag{1}$$

wo ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ein entsprechend gewähltes kovariantes $n$-Bein dieses Punktes ist.

Aus (1) folgt

$$g = |g_{ik}| = |{}_{(\alpha)}\mu_i|^2 > 0. \tag{2}$$

Den zu $g_{ik}$ adjungierten kontravarianten symmetrischen Tensor zweiter Stufe $g^{ik}$ nennen wir den *kontravarianten Maßtensor* des $R_n$. Wir notieren die $g_{ik}$ mit $g^{ik}$ verknüpfenden tensoriellen Relationen

$$g_{ik} g^{ij} = \delta^j_k. \tag{3}$$

Sind $x_i, \lambda^i$ und $x_i, \lambda_i$ durch die Tensorrelationen

$$\lambda_i = g_{ik} \lambda^k, \quad \lambda^j = g^{ij} \lambda_i \tag{4}$$

(die zweite folgt aus der ersten durch Überschiebung mit $g^{ij}$, die erste aus der zweiten durch Überschiebung mit $g_{kj}$) verbunden, so sprechen wir vom *Vektor* $\lambda$ des Punktes $P(x_1, \ldots, x_n)$, dessen kovariante Komponenten die $\lambda_i$ und dessen kontravariante Komponenten die $\lambda^i$ sind. Auch wenn man vom Vektor schlechtweg spricht, behalten die Operationen: Multiplikation mit einem Skalar und Addition ihren Sinn. Dasselbe gilt für die lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Gilt nämlich $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i = 0$, so gilt ebenfalls $\alpha\lambda^i + \beta\mu^i = 0$ und umgekehrt.

Analog können wir mittels der Maßtensoren $g_{ik}$ und $g^{ik}$ einen Index einer Tensorkomponente $T^{\cdot}_{\cdot\cdot}$ von oben nach unten bzw. von unten nach oben „ziehen". Darunter versteht man die Überschiebung des Tensors $T^{r\cdot}_{\cdot\cdot}$ mit $g_{ri}$ (bzw. $T^{\cdot}_{r\cdot}$ mit $g^{ir}$), z. B.

$$T^{\cdot\cdot k}_{ij\cdot} = g_{ir} T^{r\cdot k}_{\cdot j\cdot}. \tag{5}$$

Wegen dieser Operation ist jedem Index des Tensors $r+s$ter Stufe $T_{i_1\ldots i_r}^{j_1\ldots j_s}$ eine der Ordnungszahlen $1, 2, \ldots, r+s$ zuzuordnen, da ja (infolge der obigen Operation) jeder kovariante Index kontravariant gestellt werden kann und umgekehrt. Der Stellenzeiger ist im Beispiel (5) durch Punkte markiert, der Index $i$ nimmt die erste, $j$ die zweite und $k$ die dritte Stelle ein.[1])

Die so aus einem gegebenen Tensor durch Indizesverschiebung gewonnenen Tensoren sollen stets durch gleiche Buchstaben (z. B. (5)) bezeichnet sein. Man spricht dann vom Tensor schlechtweg, dessen Komponentensystem also kovariant, kontravariant oder gemischt vorgegeben sein kann.[2]) *Adjungiert* sind aber nur die Tensoren $g^{ik}$ und $g_{ik}$, aber im allgemeinen nicht $t^{ik} = g^{ip}g^{kq}t_{pq}$ und $t_{ik}$, wo $t_{ik}$ ein beliebiger Tensor zweiter Stufe ist, im Gegensatz zu der Bezeichnung in I, § 8 C.

Das in II definierte absolute Differential, mit dem Maßtensor $g_{ik}$ gebildet, bezeichnen wir von nun an ausschließlich mit deutschem $\mathfrak{d}$. Es gilt also hier

$$\mathfrak{d}\lambda^i = d\lambda^i + \begin{Bmatrix} pq \\ i \end{Bmatrix} \lambda^p dx_q \tag{6}$$

mit $\begin{Bmatrix} pq \\ i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} qp \\ i \end{Bmatrix}$. Es gilt weiter die fundamentale Relation

$$\mathfrak{d}\, g_{ik} = 0, \quad \frac{\mathfrak{d}\, g_{ik}}{\mathfrak{d}\, x_j} = 0, \tag{7}$$

d. h. $g_{ik}$ verhält sich in bezug auf die absolute Ableitung wie eine Konstante in bezug auf die gewöhnliche Ableitung. In der Tat gilt

$$\begin{Bmatrix} ij \\ r \end{Bmatrix} = g^{rl}\begin{bmatrix} ij \\ l \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ij \\ t \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} ij \\ r \end{Bmatrix} g_{rt} \tag{8}$$

(die zweite Relation folgt aus der ersten (II, 2, 25) durch Überschiebung mit $g_{rt}$). Somit wird

$$\frac{\mathfrak{d} g_{ik}}{\mathfrak{d} x_j} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \begin{Bmatrix} ij \\ l \end{Bmatrix} g_{lk} - \begin{Bmatrix} kj \\ l \end{Bmatrix} g_{il} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \begin{bmatrix} ij \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} kj \\ i \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i}\right) = 0,$$

w. z. b. w. Für späteren Gebrauch notieren wir

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} ij \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kj \\ i \end{bmatrix}. \tag{9}$$

---

1) Die Zuordnung der Stellenzahlen bei einem Tensor, z. B. $\frac{\mathfrak{d}\lambda^i}{\mathfrak{d}x_k} = \beta_k^i$, ist ganz willkürlich. Wir können $\frac{\mathfrak{d}\lambda^i}{\mathfrak{d}x_k} = \beta^{i}_{\cdot k}$ oder $\frac{\mathfrak{d}\lambda^i}{\mathfrak{d}x_k} = \beta_{k\cdot}^{\cdot i}$ schreiben. *Ist die Zuordnung aber einmal gewählt, so muß sie beibehalten werden.*

2) Aus (3) folgt damit, daß $\delta_k^j = g_k^j$ ist. Genauer folgt $\delta_k^j = g^{j}_{\cdot k}$ oder $= g_{k\cdot}^{\cdot j}$, aber wegen $g_{ik} = g_{ki}$ ist $g^{j}_{\cdot k} = g_{k\cdot}^{\cdot j}$.

Auch für den „gemischten Maßtensor" $g_i^k = \delta_i^k$ gilt

(10) $$\mathfrak{d} g_i^k = 0,$$

da

(11) $$\frac{\mathfrak{d}\,\delta_i^k}{\mathfrak{d}\,x_j} = \frac{\partial\,\delta_i^k}{\partial\,x_j} - \left\{{ij \atop r}\right\}\delta_r^k + \left\{{rj \atop k}\right\}\delta_i^r = -\left\{{ij \atop k}\right\} + \left\{{ij \atop k}\right\} = 0$$

ist. Aus (8) erhalten wir dann

(12) $$g_{ik}\,\mathfrak{d} g^{ij} = 0$$

und daraus, da $|g_{ik}| > 0$ ist,

(13) $$\boldsymbol{\mathfrak{d} g^{ij} = 0}.$$

Aus (7) und (13) folgt

$$\mathfrak{d}(g_{ik}T^{\cdot\cdot}_{\cdot}) = g_{ik}\,\mathfrak{d}\,T^{\cdot\cdot}_{\cdot}, \quad \mathfrak{d}(g^{ik}T^{\cdot}_{\cdot}) = g^{ik}\,\mathfrak{d}\,T^{\cdot}_{\cdot}.$$

Betrachten wir das in die kanonische Darstellung (1) von $g_{ik}$ eintretende $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$;

(14) $${}_{(\alpha)}\mu^i = g^{ik}\,{}_{(\alpha)}\mu_k$$

sind die kontravarianten Komponenten des Vektors ${}_{(\alpha)}\mu$, dessen kovariante Komponenten ${}_{(\alpha)}\mu_i$ sind. Durch Überschiebung von (14) mit ${}_{(\alpha)}\mu_l$ folgt nach (1)

(15) $${}_{(\alpha)}\mu^i\,{}_{(\alpha)}\mu_l = g^{ik}g_{kl} = \delta_l^i,$$

d. h. die ${}_{(\alpha)}\mu^i$ bilden das zu dem $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ adjungierte kontravariante $n$-Bein. Neben (15) gilt somit auch

(15′) $${}_{(\alpha)}\mu^i\,{}_{(\beta)}\mu_i = \delta_{\alpha\beta}.$$

Durch Überschiebung mit ${}_{(\alpha)}\mu^j$ folgt aus (14)

(16) $$\boldsymbol{g^{ij} = {}_{(\alpha)}\mu^i\,{}_{(\alpha)}\mu^j},$$

die kanonische Darstellung des kontravarianten Tensors $g^{ij}$. Die Relationen (15′) sind äquivalent mit

(17) $$g_{ik}\,{}_{(\alpha)}\mu^i\,{}_{(\beta)}\mu^k = g^{ik}\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\beta)}\mu_k = \delta_{\alpha\beta}.$$

Zum Schluß sei noch eine *Beindarstellung absoluter Differentiale* angegeben. Sei ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ein in allen Punkten des $R_n$ definiertes, stetig differenzierbares $n$-Bein. Es gelte also für jeden Punkt des $R_n$

(18) $${}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\beta)}\mu^i = \delta_{\alpha\beta}, \quad {}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu^k = \delta_i^k.$$

Die kovarianten Ableitungen der ${}_{(\alpha)}\mu_i$ nach $x_k$ lassen sich dann mittels geeigneter Skalare ${}_{(\alpha\beta\gamma)}\mu$ in dem $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ in der Form

(19) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\mu_i}{\mathfrak{d}\,x_k} = {}_{(\alpha\beta\gamma)}\mu\,{}_{(\beta)}\mu_i\,{}_{(\gamma)}\mu_k$$

darstellen. Setzen wir zur Abkürzung

(20) $${}_{(\alpha\beta\gamma)}\mu\,{}_{(\gamma)}\mu_k = {}_{(\alpha\beta)}C_k$$

so wird (19)

(21) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\mu_i}{\mathfrak{d}\,x_k} = {}_{(\alpha\beta)}C_k\,{}_{(\beta)}\mu_i,$$

woraus durch Überschiebung mit $g^{ij}$

(21′) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\mu^j}{\mathfrak{d}\,x_k} = {}_{(\alpha\beta)}C_k\,{}_{(\beta)}\mu^j$$

folgt. Aus den ersten Gleichungen (18) ergibt sich durch kovariante Differentiation nach $x_k$ wegen (18), (21) und (21′)

(22) $${}_{(\alpha\beta)}C_i = -\,{}_{(\beta\alpha)}C_i.$$

Ist $\lambda_i$ ein stetig differenzierbarer Vektor, so folgt aus seiner Beindarstellung

(23) $$\lambda_i = {}_{(\alpha)}\lambda\,{}_{(\alpha)}\mu_i$$

durch absolute Differentiation

(24) $$\mathfrak{d}\lambda_i = (d\,{}_{(\alpha)}\lambda + {}_{(\beta)}\lambda\,{}_{(\beta\alpha)}C_k\,dx_k)\,{}_{(\alpha)}\mu_i.$$

In analoger Weise läßt sich das absolute Differential eines beliebigen Tensors durch die ${}_{(\alpha\beta)}C_k$ und ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ausdrücken; insbesondere gilt für einen kontravarianten Vektor $\lambda^i$

(25) $$\mathfrak{d}\lambda^i = (d\,{}_{(\alpha)}\lambda + {}_{(\beta)}\lambda\,{}_{(\beta\alpha)}C_k\,dx_k)\,{}_{(\alpha)}\mu^i.$$

Man beachte, daß der Klammerausdruck derselbe ist wie in (24).

## § 2. Das Messen.

Es sei im Punkte $P$ des $R_n$ der Vektor $\lambda$ mit den kontravarianten Komponenten $\lambda^i$ und den kovarianten Komponenten $\lambda_i$ gegeben. Unter der *Länge $\lambda$ (dem Maß) des Vektors $\lambda$* versteht man die positive Wurzel der Invariante

(1) $$g_{ik}\lambda^i\lambda^k = \lambda_k\lambda^k = g^{ik}\lambda_i\lambda_k,$$

also

(1′) $$\lambda = \sqrt{g_{ik}\lambda^i\lambda^k}.$$

Die Länge $\lambda$ ist eine reelle positive Zahl, die nur für den Nullvektor ($\lambda^i = 0$) verschwindet. Vektoren der Länge eins heißen *normiert, Einheitsvektoren* oder *Richtungen.*

Sind jetzt $\lambda$ und $\mu$ zwei Vektoren im Punkte $P$, so ist die Invariante

(2) $$\frac{g_{ik}\lambda^i\mu^k}{\sqrt{g_{ik}\lambda^i\lambda^k}\,\sqrt{g_{ik}\mu^i\mu^k}} \leqq 1.$$

Der Wert eins wird dann und nur dann angenommen, wenn $\lambda$ und $\mu$ linear abhängig sind; ist nämlich $\alpha\lambda^i + \beta\mu^i = 0$ oder $\lambda^i = \varrho\mu^i$, so wird der Wert von (2) gleich eins, wie behauptet. Wir setzen voraus, daß die Vektoren $\lambda$ und $\mu$ *linear unabhängig* sind und bilden

(3) $$g_{ik}(\alpha\lambda^i + \beta\mu^i)(\alpha\lambda^k + \beta\mu^k)$$

mit von Null verschiedenen Skalaren $\alpha$ und $\beta$. Der Wert der Invariante (3), das Quadrat der Länge des Vektors $\alpha\lambda + \beta\mu$ ist stets größer als Null und wird für keine Wahl von $\alpha$ und $\beta$ Null, da sonst (für diese Werte von $\alpha$ und $\beta$) $\alpha\lambda + \beta\mu = 0$ wäre gegen Voraussetzung. Die in $\alpha:\beta$ quadratische Gleichung

(4) $$\alpha^2(g_{ik}\lambda^i\lambda^k) + 2\alpha\beta(g_{ik}\lambda^i\mu^k) + \beta^2(g_{ik}\mu^i\mu^k) = 0$$

hat demnach keine reelle Wurzel; ihre Diskriminante

(5) $$(g_{ik}\lambda^i\lambda^k)(g_{ik}\mu^i\mu^k) - (g_{ik}\lambda^i\mu^k)^2$$

muß daher positiv, also der Wert von (2) kleiner als eins sein.

Setzen wir demnach

(6) $$\cos \sphericalangle \lambda\mu = \frac{g_{ik}\lambda^i\mu^k}{\sqrt{g_{ik}\lambda^i\lambda^k}\sqrt{g_{ik}\mu^i\mu^k}},$$

so ist dadurch bis auf Vielfache von $2\pi$ und bis auf das Vorzeichen der reelle (mit $\sphericalangle \lambda\mu$ bezeichnete) Winkel der Vektoren $\lambda$ und $\mu$ definiert.

Der Winkel $\sphericalangle \lambda\mu$ hängt nur von den Richtungen der Vektoren $\lambda$ und $\mu$ ab.[1]) Die Vektoren $\varrho\lambda$, $\sigma\mu$ ($\varrho$, $\sigma$ positive Skalare) definieren den gleichen Winkel wie die Vektoren $\lambda$ und $\mu$. Ist $\sphericalangle \lambda\mu = 0$, also $\cos \sphericalangle \lambda\mu = 1$, so bedeutet das nach obigem *lineare Abhängigkeit der Vektoren* $\lambda^i$ *und* $\mu^i$; auch umgekehrt folgt aus $\lambda^i = \varrho\mu^i$, daß $\cos \sphericalangle \lambda\mu = 1$, d. h. $\sphericalangle \lambda\mu = 0$ ist.

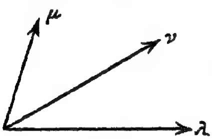

Fig. 1.

Nun wird man aber von einer brauchbaren Winkeldefinition die Gültigkeit des Additionstheorems verlangen: Sind $\lambda$, $\mu$ und $\nu$ drei Vektoren des zweidimensionalen Vektorraumes $\{\lambda, \mu\}$ in $P$ (Fig. 1), so muß bei geeigneter Wahl des Vorzeichens der auftretenden Winkel

(7) $$\sphericalangle\lambda\mu + \sphericalangle\mu\nu = \sphericalangle\lambda\nu$$

sein. Diese Forderung läßt sich erfüllen, wenn man nur in geeigneter Weise einen Richtungssinn im Vektorraume $\{\lambda, \mu\}$ festlegt. Dieser Vektorraum

(8) $$\nu^i = \alpha\lambda^i + \beta\mu^i, \qquad (\alpha, \beta \text{ beliebige Skalare})$$

schneidet den isotropen Kegel (Kegel der isotropen Vektoren) $g_{ik}\nu^i\nu^k = 0$ in zwei (natürlich imaginären) Vektoren $'\Gamma$ und $''\Gamma$, deren Darstellungszahlen $\alpha$ und $\beta$ der quadratischen Gleichung

(9) $$\Phi = \alpha^2(\lambda\lambda) + 2\alpha\beta(\lambda\mu) + \beta^2(\mu\mu) = 0$$

genügen, wobei zur Abkürzung

(10) $$(\lambda\mu) = \lambda_i\mu^i = g_{ik}\lambda^i\mu^k$$

gesetzt ist. Sind $\alpha_1:\beta_1$ und $\alpha_2:\beta_2$ die beiden Wurzeln von (9), so ist

(11) $$'\Gamma^i = \alpha_1\lambda^i + \beta_1\mu^i, \quad ''\Gamma^i = \alpha_2\lambda^i + \beta_2\mu^i,$$

1) Dabei ist unter der Richtung des Vektors $\lambda^i$ der Einheitsvektor $\dfrac{\lambda^i}{+\sqrt{\lambda_i\lambda^i}}$ verstanden.

und für $\Phi$ gilt

(12) $$\Phi = p(\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1)(\alpha\beta_2 - \beta\alpha_2),$$

was mit (9) verglichen

(13) $$(\lambda\lambda) = p\beta_1\beta_2, \quad (\lambda\mu) = -\frac{p}{2}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1), \quad (\mu\mu) = p\alpha_1\alpha_2$$

gibt. Wir können demnach $\cos^2 \sphericalangle \lambda\mu$ nach (6) in der Form schreiben

(14) $$\cos^2 \sphericalangle \lambda\mu = \frac{1}{4}\frac{\alpha_1^2\beta_2^2 + 2\alpha_1\beta_2\alpha_2\beta_1 + \alpha_2^2\beta_1^2}{\beta_1\beta_2\alpha_1\alpha_2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} : \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) + \frac{1}{2}.$$

Setzen wir $\sphericalangle \lambda\mu = \varphi$, so gilt aber auch

(15) $$\cos^2\varphi = \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^2}{4} = \frac{1}{4}[e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}] + \frac{1}{2},$$

also, wenn wir $\dfrac{\frac{\alpha_1}{\beta_1}}{\frac{\alpha_2}{\beta_2}} = w$ setzen,

(16) $$e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi} = w + w^{-1}.$$

Durch Multiplikation mit $e^{2i\varphi}$ ergibt sich eine quadratische Gleichung fur $e^{2i\varphi}$, deren Wurzeln

(17) $$e^{2i\varphi} = w, \quad e^{-2i\varphi} = w^{-1}$$

man aus (16) abliest. Wir erhalten somit $2i\varphi = \pm \ln w$, also

(18) $$\varphi = \pm\frac{i}{2}\ln\left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} : \frac{\alpha_2}{\beta_2}\right).$$

Wir müssen nun, um weiter diskutieren zu können, einige elementare Tatsachen der projektiven Geometrie in Erinnerung bringen. Ist $\{\varrho^i, \sigma^i\}$ ein zweidimensionaler Vektorraum in einem Punkt $P$, so hat jeder Vektor $\tau^i$ dieses $V^{(2)}$ seine Darstellung

(19) $$\tau^i = A\varrho^i + B\sigma^i.$$

$A$, $B$ heißen seine Darstellungszahlen, die wir, sofern uns bloß die Richtung von $\tau^i$ interessiert, als homogene Koordinaten von $\tau^i$ ansehen. Sind

(20) $${}_{(\alpha)}p^i = {}_{(\alpha)}A\varrho^i + {}_{(\alpha)}B\sigma^i, \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4)$$

vier Richtungen des Vektorraumes $\{\varrho, \sigma\}$, so definiert man als Doppelverhältnis dieser vier Richtungen die Invariante

(21) $$({}_{(1)}p\; {}_{(2)}p\; {}_{(3)}p\; {}_{(4)}p) = \frac{{}_{(1)}p - {}_{(3)}p}{{}_{(1)}p - {}_{(4)}p} : \frac{{}_{(2)}p - {}_{(3)}p}{{}_{(2)}p - {}_{(4)}p},$$

wobei

$${}_{(\alpha)}p - {}_{(\beta)}p = {}_{(\alpha)}A\,{}_{(\beta)}B - {}_{(\beta)}A\,{}_{(\alpha)}B$$

ist. Ausführlich gilt daher

(21′) $$({}_{(1)}p\; {}_{(2)}p\; {}_{(3)}p\; {}_{(4)}p) = \frac{{}_{(1)}A\,{}_{(3)}B - {}_{(3)}A\,{}_{(1)}B}{{}_{(1)}A\,{}_{(4)}B - {}_{(4)}A\,{}_{(1)}B}\;\frac{{}_{(2)}A\,{}_{(4)}B - {}_{(4)}A\,{}_{(2)}B}{{}_{(2)}A\,{}_{(3)}B - {}_{(3)}A\,{}_{(2)}B}.$$

Neben anderen ähnlichen Relationen gilt nach (21′)

$$(22)\quad ({}_{(1)}p\,{}_{(2)}p\,{}_{(3)}p\,{}_{(4)}p) = \frac{1}{({}_{(2)}p\,{}_{(1)}p\,{}_{(3)}p\,{}_{(4)}p)},\quad ({}_{(1)}p\,{}_{(2)}p\,{}_{(3)}p\,{}_{(4)}p) = ({}_{(3)}p\,{}_{(4)}p\,{}_{(1)}p\,{}_{(2)}p).$$

Das Doppelverhältnis ist in den Darstellungszahlen eines jeden der vier Vektoren (20) homogen von nullter Ordnung, also wieder nur von den Richtungen dieser Vektoren abhängig. Hätte man statt $\varrho^i$, $\sigma^i$ ein anderes den $V^{(2)}\{\varrho^i, \sigma^i\}$ aufspannendes Zweibein verwendet, so würde daraus die Transformation

$$(23)\qquad A = \alpha\bar{A} + \beta\bar{B},\quad B = \gamma\bar{A} + \delta\bar{B}\quad \text{mit} \begin{vmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{vmatrix} \neq 0$$

der Darstellungszahlen $A$, $B$ des Vektors $\tau^i$ (19) folgen. Das Doppelverhältnis (21′) bleibt dabei invariant, es ist also nur abhängig von den vier Vektoren (20) und nicht von der Wahl des den $V^{(2)}\{\varrho^i, \sigma^i\}$ aufspannenden Zweibeins.

Nach dieser Erinnerung gehen wir zu unserer Formel (18) zurück. Wir berechnen das Doppelverhältnis $('\Gamma\,''\Gamma\lambda\mu)$ der vier Vektoren $'\Gamma$, $''\Gamma$, $\lambda$ und $\mu$, wobei $\lambda$ und $\mu$ als Darstellungszweibein verwendet werde. Die Darstellungszahlen $A$ und $B$ entnehmen wir dem Schema

| | $'\Gamma$ | $''\Gamma$ | $\lambda$ | $\mu$ |
|---|---|---|---|---|
| $A$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | 1 | 0 |
| $B$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | 0 | 1 |

Aus (21′) folgt

$$(23')\qquad ('\Gamma\,''\Gamma\lambda\mu) = \frac{-\beta_1}{\alpha_1}\cdot\frac{\alpha_2}{-\beta_2} = \frac{\frac{\alpha_2}{\beta_2}}{\frac{\alpha_1}{\beta_1}} = w^{-1},$$

und somit erhalten wir statt (18)

$$(24)\qquad \sphericalangle\,\lambda\mu = \varphi = \pm\frac{i}{2}\ln('\Gamma\,''\Gamma\lambda\mu).$$

Kommen wir nun überein, welchen der beiden isotropen Vektoren $\Gamma$ wir (als ersten) mit $'\Gamma$ bezeichnen, so ist durch

$$(25)\qquad \sphericalangle\,\lambda\mu = +\frac{i}{2}\ln('\Gamma\,''\Gamma\lambda\mu)$$

über den Richtungssinn des Winkels entschieden. Der Richtungssinn wird bei Vertauschung der beiden isotropen Vektoren $'\Gamma$, $''\Gamma$ nach (22) umgekehrt. Ferner gilt $\sphericalangle\,\lambda\mu = -\sphericalangle\,\mu\lambda$. Aus

$$(26)\qquad ('\Gamma\,''\Gamma\lambda\mu)('\Gamma\,''\Gamma\mu\nu) = ('\Gamma\,''\Gamma\lambda\nu)$$

folgt aber nach (25)

$$(27)\qquad \sphericalangle\,\lambda\mu + \sphericalangle\,\mu\nu = \sphericalangle\,\lambda\nu + \varepsilon\pi,$$

wo $\varepsilon$ entweder $0, -1$ oder $+1$ bedeutet. Denn in (25) ist ja $\sphericalangle\,\lambda\mu$ nur bis auf $\pm\pi$ und Vielfache von $2\pi$ bestimmt ($\ln z = \ln|z| + i\varphi$). Da $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos\alpha$ ist, so *legen* (6) *und* (25) *erst gemeinsam den Winkel* $\sphericalangle \lambda\mu$ *fest.*[1])

Da die beiden Winkeldefinitionen den Winkel als stetige Funktion der Richtungskomponenten geben, so kann in (27) kein Sprung für $\varepsilon$ eintreten, d. h. $\varepsilon$ muß immer entweder 0 oder $-1$ oder $+1$ sein. Für $\lambda = \mu$ ist aber $\varepsilon = 0$, also muß $\varepsilon$ immer Null sein. *Es gilt somit in der Tat das Gesetz* (7).

Für $\sphericalangle \lambda\mu = \pm\frac{\pi}{2}$ folgt aus (25)

$$(28) \qquad ('\Gamma''\Gamma\lambda\mu) = -1,$$

und umgekehrt ist, falls (28) gilt, $\sphericalangle \lambda\mu = \pm\frac{\pi}{2}$. Normale Vektoren bilden mit den beiden isotropen Vektoren $'\Gamma$ und $''\Gamma$ demnach das Doppelverhältnis $-1$, oder: $\lambda^i$ und $\mu^i$ stehen dann und nur dann normal, wenn jeder dieser Vektoren im Polarvektorraum $V^{(n-1)}$ des anderen in bezug auf den isotropen Kegel liegt. Letzteres Resultat folgt auch direkt aus $g_{ik}\lambda^i\mu^k = 0$.

Aus der Formel (6) gewinnen wir

$$(29) \qquad \sin^2 \sphericalangle \lambda\mu = \frac{(g_{ik}\lambda^i\lambda^k)(g_{pq}\mu^p\mu^q) - (g_{iq}\lambda^i\mu^q)(g_{pk}\mu^p\lambda^k)}{(g_{ik}\lambda^i\lambda^k)(g_{pq}\mu^p\mu^q)}$$

oder

$$(30) \quad \sin^2 \sphericalangle \lambda\mu \cdot (g_{ik}\lambda^i\lambda^k)(g_{pq}\mu^p\mu^q) = (g_{ik}g_{pq} - g_{iq}g_{pk})(\lambda^i\mu^p - \lambda^p\mu^i)(\lambda^k\mu^q - \lambda^q\mu^k),$$

wo rechts über alle *Kombinationen* $(i, p)$, $(k, q)$ zu summieren ist.

Wir definieren: $r$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ eines Punktes $P$ bilden ein *normiertes r-Bein* in $P$, wenn sie den Tensorrelationen

$$(31) \qquad {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\beta)}\lambda^i = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$$

genügen. Wir können von einem $r$-Bein sprechen, da $r$ solche Vektoren linear unabhängig sind. Denn aus ${}_{(\alpha)}a\,{}_{(\alpha)}\lambda_i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ folgt durch Überschiebung mit ${}_{(\beta)}\lambda^i$ wegen (31) sofort ${}_{(\beta)}a = 0$ für $\beta = 1, \ldots, r$.

*Wegen* (1,17) *ist das in eine kanonische Darstellung* (1,1) *von* $g_{ik}$ *eintretende n-Bein* ${}_{(\alpha)}\mu_i$ *ein normiertes n-Bein.*

---

1) Denn nur für einen der beiden Winkel $\sphericalangle \lambda\mu$ und $\sphericalangle \lambda\mu + \pi$ ergibt $\cos \sphericalangle \lambda\mu$ wegen $\cos(\sphericalangle \lambda\mu + \pi) = -\cos \sphericalangle \lambda\mu$ das durch (6) bestimmte Vorzeichen. Dadurch, daß man $\frac{i}{2}\ln('\Gamma''\Gamma\lambda\mu) = \sphericalangle \lambda\mu$ und $\frac{i}{2}\ln('\Gamma''\Gamma\mu\nu) = \sphericalangle \mu\nu$ setzt, enscheidet man sich für *einen* der beiden (mod $2\pi$) möglichen Werte jeder dieser beiden Größen. Damit ist in (27) über den Wert von $\frac{i}{2}\ln('\Gamma''\Gamma\lambda\nu)$ bereits mitentschieden und es ist keineswegs von vornherein feststehend, daß dieser Wert von $\frac{i}{2}\ln('\Gamma''\Gamma\lambda\nu)$ ebenfalls gleich $\sphericalangle \lambda\nu$ selbst ist.

Ist umgekehrt ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ ein normiertes $n$-Bein in $P$, gilt also (31) für $r = n$ (und damit ${}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\alpha)}\lambda^k = \delta_k^i$), so ist ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ das zu ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ adjungierte kontravariante $n$-Bein. Aus $g_{ik} = {}_{(\alpha\beta)}g\, {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\beta)}\lambda_k$ und ${}_{(\alpha\beta)}g = g_{ik}\, {}_{(\alpha)}\lambda^i\, {}_{(\beta)}\lambda^k = \delta_{\alpha\beta}$ folgt dann

$$g_{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\alpha)}\lambda_k \tag{32}$$

als Darstellung des Maßtensors durch das normierte $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$.

*Das Problem der kanonischen Darstellung des Maßtensors $g_{ik}$ ist demnach identisch mit der Konstruktion normierter $n$-Beine.* Wir behandeln zunächst die Konstruktion eines einen $r$dimensionalen Vektorraum $V^{(r)}$ aufspannenden normierten $r$-Beins.

Sei $V^{(r)}$ ein $r$dimensionaler Vektorraum in $P$. Aus ihm heben wir einen Vektor $\lambda$ beliebig heraus und normieren ihn. *Einen Vektor $\lambda$ normieren* heißt, den Vektor $\lambda^i$ durch seine Richtung $\frac{\lambda^i}{\sqrt{g_{ik}\lambda^i\lambda^k}}$ ersetzen. Das ist stets ausführbar, wenn $\lambda^i$ kein Nullvektor ist. Der so gewonnene Einheitsvektor sei mit ${}_{(1)}\lambda^i$ bezeichnet. Ist $r = 1$, dann sind wir fertig, ist $r > 1$, so gibt es im $V^{(r)}$ sicher einen nicht im $V^{(1)} \equiv \{{}_{(1)}\lambda^i\}$ liegenden Vektor $\mu$. Im Vektorraume $V^{(2)} \equiv \{{}_{(1)}\lambda, \mu\}$ gibt es einen auf ${}_{(1)}\lambda$ normal stehenden Vektor. In der Tat ist $\sigma\, {}_{(1)}\lambda + \mu$ dieser Vektor, sobald $\sigma\, {}_{(1)}\lambda_i\, {}_{(1)}\lambda^i + \mu_i\, {}_{(1)}\lambda^i = 0$ ist, also $\sigma = -\mu_i\, {}_{(1)}\lambda^i$ gesetzt wird. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren ${}_{(1)}\lambda$ und $\mu$ ist dieser Vektor kein Nullvektor, wir können ihn also normieren und erhalten den Einheitsvektor ${}_{(2)}\lambda_i$, der auf ${}_{(1)}\lambda_i$ normal steht.

Ist $r = 2$, dann sind wir am Ziele, ist $r > 2$, so gibt es einen Vektor $\nu$ des $V^{(r)}$, der nicht im $V^{(2)} \equiv \{{}_{(1)}\lambda, {}_{(2)}\lambda\}$ liegt. Im $V^{(3)} \equiv \{{}_{(1)}\lambda, {}_{(2)}\lambda, \nu\}$ gibt es einen Vektor, der auf ${}_{(1)}\lambda$ und ${}_{(2)}\lambda$ normal steht; und zwar ist $\sigma\, {}_{(1)}\lambda + \tau\, {}_{(2)}\lambda + \nu$ dieser Vektor, sobald man $\sigma$ und $\tau$ aus $0 = (\sigma\, {}_{(1)}\lambda_i + \tau\, {}_{(2)}\lambda_i + \nu_i)\, {}_{(1)}\lambda^i$, $0 = (\sigma\, {}_{(1)}\lambda_i + \tau\, {}_{(2)}\lambda_i + \nu_i)\, {}_{(2)}\lambda^i$ bestimmt, also $\sigma = -\nu_i\, {}_{(1)}\lambda^i$ und $\tau = -\nu_i\, {}_{(2)}\lambda^i$ setzt. Dieser Vektor, der kein Nullvektor ist, gibt uns nach Normierung den dritten Einheitsvektor ${}_{(3)}\lambda_i$, usw. Auf diesem Wege gelangt man zur Konstruktion eines normierten $r$-Beines ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$, das den gegebenen $V^{(r)}$ aufspannt.

Man kann, indem man dieselbe Konstruktion für den *Normalvektorraum* $V^{(n-r)}$ des $V^{(r)}$ ausführt, das $r$-Bein zu einem normierten $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ ergänzen.

Ist ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ irgendein normiertes, den $V^{(r)}$ aufspannendes $r$-Bein in $P$, so wird jeder der drei Tensoren zweiter Stufe

$$\left\{\begin{aligned} p_{ik} &= {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\alpha)}\lambda_k \\ p^i_{\cdot k} &= {}_{(\alpha)}\lambda^i\, {}_{(\alpha)}\lambda_k \;(= p_k{}^i_{\cdot} = {}_{(\alpha)}\lambda_k\, {}_{(\alpha)}\lambda^i) \\ p^{ik} &= {}_{(\alpha)}\lambda^i\, {}_{(\alpha)}\lambda^k \end{aligned}\right. \qquad (\alpha = 1, \ldots, r) \tag{33}$$

*Projektionstensor des $V^{(r)}$* genannt. Wir zeigen zunächst, daß der Projektionstensor von dem den $V^{(r)}$ aufspannenden speziellen normierten $r$-Bein nicht abhängt. Ist ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ ein zweites, den $V^{(r)}$ aufspannendes normiertes $r$-Bein, dann gelten die Darstellungen

(34) $$ {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i = {}_{(\alpha\beta)}C\,{}_{(\beta)}\lambda_i, \quad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = {}_{(\alpha\beta)}C\,{}_{(\beta)}\lambda^i \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r); $$

aus $\quad {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i\,{}_{(\beta)}\bar{\lambda}^i = \delta_{\alpha\beta} = {}_{(\alpha\gamma)}C\,{}_{(\beta\varepsilon)}C\,{}_{(\gamma)}\lambda_i\,{}_{(\varepsilon)}\lambda^i = {}_{(\alpha\gamma)}C\,{}_{(\beta\varepsilon)}C\,\delta_{\gamma\varepsilon} = {}_{(\alpha\gamma)}C\,{}_{(\beta\gamma)}C \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$

erkennt man, daß die Darstellungsmatrix $\| {}_{(\alpha\beta)}C \|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$ *orthogonal ist*. Bilden wir nun den Projektionstensor mit dem normierten $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i$, so erhalten wir

(35) $$ \bar{p}_{ik} = {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i\,{}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_k = {}_{(\alpha\beta)}C\,{}_{(\alpha\gamma)}C\,{}_{(\beta)}\lambda_i\,{}_{(\gamma)}\lambda_k = {}_{(\beta)}\lambda_i\,{}_{(\beta)}\lambda_k = p_{ik}, $$

w. z. b. w.

Es bleibt jetzt noch die Rechtfertigung des Namens *Projektionstensor*. Wir definieren: Der Vektor $\underline{\lambda}_i$ eines Vektorraumes $V^{(r)}$ heißt *Projektionsvektor* oder kurz *Projektion des Vektors $\lambda_i$ (desselben Punktes) in den Vektorraum $V^{(r)}$*, wenn der Differenzvektor $\lambda_i - \underline{\lambda}_i$ auf dem Vektorraume $V^{(r)}$ normal steht. Es gilt also

(36) $$ \lambda_i = \underline{\lambda}_i + l_i, $$

wo $\xi^i l_i = 0$ ist für jeden Vektor $\xi^i$ des $V^{(r)}$. Durch diese Definition wird die Projektion eindeutig bestimmt. Wenn nämlich neben (36) noch eine zweite solche Zerlegung

$$ \lambda_i = \underline{\bar{\lambda}}_i + \bar{l}_i $$

des Vektors $\lambda_i$ existierte, so wäre

(36′) $$ \underline{\lambda}_i - \underline{\bar{\lambda}}_i = \bar{l}_i - l_i . $$

Überschieben wir (36′) mit $\underline{\lambda}^i - \underline{\bar{\lambda}}^i$, so erhalten wir

(36″) $$ (\underline{\lambda}_i - \underline{\bar{\lambda}}_i)(\underline{\lambda}^i - \underline{\bar{\lambda}}^i) = g_{ik}(\underline{\lambda}^i - \underline{\bar{\lambda}}^i)(\underline{\lambda}^k - \underline{\bar{\lambda}}^k) = 0, $$

also, da $g_{ik}$ positiv definit ist, $\underline{\lambda}_i = \underline{\bar{\lambda}}_i$, w. z. b. w.

Aus der Definition folgt: Die Summe der Projektionen zweier Vektoren in einen Vektorraum $V^{(r)}$ ist gleich der Projektion des Summenvektors dieser zwei Vektoren. Wesentlich für die Definition des Projektionsvektors ist der positiv definite Charakter des Maßtensors $g_{ik}$, der ja in den eben gegebenen Beweis ausdrücklich eintritt. Gäbe es einen reellen Vektor $\xi^i \neq 0$ mit $g_{ik}\xi^i\xi^k = 0$, so gälte die Zerlegung

$$ \xi^i = \alpha\xi^i + (1 - \alpha)\,\xi^i, $$

wo $\alpha\xi^i$ ein Vektor des $V^{(1)} = \{\xi^i\}$ und $(1 - \alpha)\,\xi^i$ dem Normalraum von $\xi^i$ angehörte. Dabei ist $\alpha$ willkürlich, daher der Projektionsvektor unbestimmt. Aus (36″) folgt eben, daß die Projektion nur bis auf einen isotropen Vektor (§ 2) bestimmt ist; ein solcher ist aber für positiv definite $g_{ik}$ nicht reell.

Ist nun $p_{ik}$ (33) der Projektionstensor des Vektorraumes $V^{(r)}$ in $P$ und $\lambda^i$ ein beliebiger Vektor in diesem Punkte $P$, so ist

$$\underline{\lambda}_i = p_{ik}\lambda^k \tag{37}$$

der Projektionsvektor von $\lambda^i$. Um dies nachzuweisen, ist zu zeigen, daß $\underline{\lambda}_i$ ein Vektor des $V^{(r)}$ und $\lambda_i - \underline{\lambda}_i$ ein Normalvektor des $V^{(r)}$ ist. Denken wir uns das den $V^{(r)}$ aufspannende normierte Bein zu einem normierten $n$-Bein ergänzt, so gilt die Darstellung

$$\lambda_i = {}_{(\alpha)}\lambda\, {}_{(\alpha)}\lambda_i, \quad {}_{(\alpha)}\lambda = \lambda_k\, {}_{(\alpha)}\lambda^k = {}_{(\alpha)}\lambda_k\, \lambda^k. \tag{38}$$

Somit ist

$$\lambda_i = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\alpha)}\lambda_k\, \lambda^k = p_{ik}\lambda^k + \sum_{\alpha=r+1}^{n} ({}_{(\alpha)}\lambda_k\, \lambda^k)\, {}_{(\alpha)}\lambda_i \tag{38'}$$

und unsere Behauptung ist bewiesen.[1])

Neben dem Projektionstensor spielt *der normierte Plückersche Tensor des Vektorraumes* $V^{(r)}$ in $P$ eine Rolle.

Ist wieder ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ ein normiertes, den $V^{(r)}$ aufspannendes $r$-Bein, so nennen wir

$$\pi^{i_1 i_2 \cdots i_r} = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{i_1} & {}_{(1)}\lambda^{i_2} & \cdots & {}_{(1)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda^{i_1} & {}_{(r)}\lambda^{i_2} & \cdots & {}_{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix} \tag{39}$$

den (jetzt bis auf das Vorzeichen bestimmten) *normierten Plückerschen Tensor des* $V^{(r)}$. Es seien weiter ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha = 1, \ldots, t;\, t \leqq r)$ $t$ Vektoren desselben Punktes $P$; wir betrachten in $P$ das Tensorprodukt

$$\pi^{i_1 i_2 \cdots i_r}\, {}_{(1)}\mu_{i_1}\, {}_{(2)}\mu_{i_2} \ldots {}_{(t)}\mu_{i_t} = \overline{\pi}^{i_{t+1} i_{t+2} \cdots i_r}. \tag{40}$$

Dieses Tensorprodukt kann auch

$$\sum_{(i_1 i_2 \ldots i_t)} \pi^{i_1 i_2 \cdots i_r} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\mu_{i_1} & {}_{(1)}\mu_{i_2} & \cdots & {}_{(1)}\mu_{i_t} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ {}_{(t)}\mu_{i_1} & {}_{(t)}\mu_{i_2} & \cdots & {}_{(t)}\mu_{i_t} \end{vmatrix} \tag{41}$$

geschrieben werden, wo über alle Kombinationen $(i_1 i_2 \ldots i_t)$ — jede einmal gezählt — zu summieren ist. Der Tensor $\overline{\pi}^{i_{t+1} \cdots i_r}$ verschwindet, sobald zwischen den Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ eine lineare Relation besteht; bezeichnen wir mit ${}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i$ die Projektion des Vektors ${}_{(\alpha)}\mu_i$ in den $V^{(r)}$, so gilt ebenfalls

$$\overline{\pi}^{i_{t+1} \cdots i_r} = \pi^{i_1 i_2 \cdots i_h}\, {}_{(1)}\underline{\mu}_{i_1}\, {}_{(2)}\underline{\mu}_{i_2} \cdots {}_{(t)}\underline{\mu}_{i_t}, \tag{42}$$

da ja ${}_{(\alpha)}\lambda^{i_s}\, {}_{(\beta)}\mu_{i_s} = {}_{(\alpha)}\lambda^{i_s}\, {}_{(\beta)}\underline{\mu}_{i_s}$ ist.

1) Aus (38′) folgt ebenfalls die Unabhängigkeit des Projektionstensors von der Wahl des normierten $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$.

Der Tensor (42) ist also nur dann Null, wenn zwischen den Projektionsvektoren ${}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i$ $(\alpha = 1, \ldots, t)$ lineare Abhängigkeit besteht. Wir wollen diesen trivialen Fall beiseite lassen und voraussetzen, daß die Vektoren ${}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i$ linear unabhängig sind. Sie spannen dann einen $t$ dimensionalen Vektorraum $V^{(t)}$ auf, der ganz im $V^{(r)}$ gelegen ist. Das den $V^{(r)}$ aufspannende normierte $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ wählen wir nun so, daß die ersten $t$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, t)$ den $V^{(t)}$ aufspannen, woraus dann

$$ {}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i \, {}_{(\beta)}\lambda^i = 0 \tag{43} $$

für $\beta > t$ folgt. Aus (39) und (42) erhalten wir

$$ \bar{\pi}^{i_{t+1}\, i_{t+2} \ldots i_r} = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{i_1}\, {}_{(1)}\underline{\mu}_{i_1} & \ldots & {}_{(1)}\lambda^{i_t}\, {}_{(t)}\underline{\mu}_{i^t} & {}_{(1)}\lambda^{i_{t+1}} & \ldots & {}_{(1)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ {}_{(t)}\lambda^{i_1}\, {}_{(1)}\underline{\mu}_{i_1} & \ldots & {}_{(t)}\lambda^{i_t}\, {}_{(t)}\underline{\mu}_{i_t} & {}_{(t)}\lambda^{i_{t+1}} & \ldots & {}_{(t)}\lambda^{i_r} \\ 0 & \ldots & 0 & {}_{(t+1)}\lambda^{i_{t+1}} & \ldots & {}_{(t+1)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & {}_{(r)}\lambda^{i_{t+1}} & \ldots & {}_{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix} \tag{44} $$

$$ = \begin{vmatrix} {}_{(t+1)}\lambda^{i_{t+1}} & {}_{(t+1)}\lambda^{i_{t+2}} & \ldots & {}_{(t+1)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda^{i_{t+1}} & {}_{(r)}\lambda^{i_{t+2}} & \ldots & {}_{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{i_1}\, {}_{(1)}\underline{\mu}_{i_1} & \ldots & {}_{(1)}\lambda^{i_t}\, {}_{(t)}\underline{\mu}_{i_t} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ {}_{(t)}\lambda^{i_1}\, {}_{(1)}\underline{\mu}_{i_1} & \ldots & {}_{(t)}\lambda^{i_t}\, {}_{(t)}\underline{\mu}_{i_t} \end{vmatrix}. $$

Es ist somit $\bar{\pi}^{i_{t+1} \ldots i_r}$ bis auf einen Faktor, der im nächsten Paragraph diskutiert wird, der normierte PLÜCKERsche Tensor jenes $V^{(r-t)}$ des $V^{(r)}$, der auf dem $V^{(t)}$ normal steht. Da dieser Faktor, wie gezeigt wird, im Falle der linearen Abhängigkeit der Vektoren ${}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i$ $(\alpha = 1, \ldots, t)$ verschwindet, so gilt auch in diesem Falle die Formel (44).

## § 3. Das Messen (Fortsetzung).

Wir ordnen $n$ in einem Punkte $P$ des $R_n$ definierten Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ das *Volumen* $V$ zu, wobei $V$ die positive Wurzel aus der Invariante

$$ V^2 = \begin{vmatrix} g_{ik}\, {}_{(1)}\lambda^i\, {}_{(1)}\lambda^k & g_{ik}\, {}_{(1)}\lambda^i\, {}_{(2)}\lambda^k & \ldots & g_{ik}\, {}_{(1)}\lambda^i\, {}_{(n)}\lambda^k \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ g_{ik}\, {}_{(n)}\lambda^i\, {}_{(1)}\lambda^k & g_{ik}\, {}_{(n)}\lambda^i\, {}_{(2)}\lambda^k & \ldots & g_{ik}\, {}_{(n)}\lambda^i\, {}_{(n)}\lambda^k \end{vmatrix} \tag{1} $$

ist. Da wir $V^2$ auch

$$ V^2 = g\, |\, {}_{(\alpha)}\lambda^i\, |^2, \quad g = |\, g_{ik}\, | > 0 \tag{2} $$

schreiben können, so ist $V$ eine reelle positive Größe, die dann und nur dann verschwindet, wenn die $n$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ linear abhängig sind.[1]) Neben (2) gilt auch

(2') $$V^2 = \frac{1}{g} \,|\, {}_{(\alpha)}\lambda_i \,|^2,$$

da

(3) $$|\, g^{ik} \,| = \frac{1}{|\, g_{ik} \,|}$$

ist und wir in (1) statt $g_{ik}\, {}_{(\alpha)}\lambda^i\, {}_{(\beta)}\lambda^k$ auch $g^{ik}\, {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\beta)}\lambda_k$ hätten schreiben können.

Ist in $P$ der $r$ dimensionale Vektorraum $V^{(r)}$ durch das $r$-Bein

(4) $${}_{(\alpha)}\lambda^i \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

aufgespannt, so denken wir uns den Normalvektorraum $V^{(n-r)}$ des $V^{(r)}$ durch das *normierte* $n-r$-Bein

(4') $${}_{(\alpha)}\lambda^i \qquad (\alpha = r+1, \ldots, n)$$

aufgespannt. Dann gilt

(5) $${}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\beta)}\lambda^i = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha = r+1, \ldots, n;\ \beta = 1, \ldots, n)$$

Als *Beinvolumen* der $r$ Vektoren (4) definieren wir das Volumen $V$ der $n$ Vektoren (4), (4'); die Determinante (1) zerfällt aber wegen (5) in ein Produkt von zwei Determinanten, deren zweite den Wert 1 hat, während die erste

(6) $$V^2 = \begin{vmatrix} g_{ik}\, {}_{(1)}\lambda^i\, {}_{(1)}\lambda^k & g_{ik}\, {}_{(1)}\lambda^i\, {}_{(2)}\lambda^k & \cdots & g_{ik}\, {}_{(1)}\lambda^i\, {}_{(r)}\lambda^k \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{ik}\, {}_{(r)}\lambda^i\, {}_{(1)}\lambda^k & g_{ik}\, {}_{(r)}\lambda^i\, {}_{(2)}\lambda^k & \cdots & g_{ik}\, {}_{(r)}\lambda^i\, {}_{(r)}\lambda^k \end{vmatrix}$$

wird, so daß $V$ wegen (6) vom normierten $n-r$-Bein (4') unabhängig ist. Wir hätten (6) von vornherein zur Definition des Beinvolumens $V$ verwenden können, aber das eingeschlagene Verfahren gibt uns die Erkenntnis, daß auch hier $V^2 > 0$ ist.

Mehr noch, wir wissen, *daß $V$ dann und nur dann verschwindet*, wenn die Vektoren (4) und (4') linear abhängig sind, d. h., da ja die Vektoren (4') untereinander und von den Vektoren (4) unabhängig sind, wenn die Vektoren (4) linear abhängig sind. Das von uns definierte Beinvolumen ist also für unabhängige Vektoren stets größer als Null. *$V = 0$ ist das Kriterium der Abhängigkeit.* Wir können statt (6) auch schreiben

1) Manche Autoren definieren $V = \sqrt{g}\,|\, {}_{(\alpha)}\lambda^i \,|$ mit $\sqrt{g} > 0$, wodurch auch negative Volumina auftreten. Die Definition ist aber dann vom Bezugssystem abhängig, daher nicht zu empfehlen.

$$(7)\qquad V^2 = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda_{i_1}\,{}_{(1)}\lambda^{i_1} & {}_{(1)}\lambda_{i_2}\,{}_{(2)}\lambda^{i_2} & \dots & {}_{(1)}\lambda_{i_r}\,{}_{(r)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda_{i_1}\,{}_{(1)}\lambda^{i_1} & {}_{(r)}\lambda_{i_2}\,{}_{(2)}\lambda^{i_2} & \dots & {}_{(r)}\lambda_{i_r}\,{}_{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(i_1 i_2 \dots i_r)} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda_{i_1} & \dots & {}_{(1)}\lambda_{i_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda_{i_1} & \dots & {}_{(r)}\lambda_{i_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{i_1} & \dots & {}_{(1)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda^{i_1} & \dots & {}_{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix}$$

(Summation wie in (3, 41)), also verschwindet $V^2$, wie wir bereits wissen, für linear abhängige Vektoren (4). Entwickeln wir (7) weiter, so ergibt

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda_{i_1} & {}_{(1)}\lambda_{i_2} & \dots & {}_{(1)}\lambda_{i_r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda_{i_1} & {}_{(r)}\lambda_{i_2} & \dots & {}_{(r)}\lambda_{i_r} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1}\,{}_{(1)}\lambda^{j_1} & g_{i_2 j_1}\,{}_{(1)}\lambda^{j_1} & \dots & g_{i_r j_1}\,{}_{(1)}\lambda^{j_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i_1 j_r}\,{}_{(r)}\lambda^{j_r} & g_{i_2 j_r}\,{}_{(r)}\lambda^{j_r} & \dots & g_{i_r j_r}\,{}_{(r)}\lambda^{j_r} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{(j_1 j_2 \dots j_r)} \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & g_{i_2 j_1} & \dots & g_{i_r j_1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i_1 j_r} & g_{i_2 j_r} & \dots & g_{i_r j_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{j_1} & \dots & {}_{(1)}\lambda^{j_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda^{j_1} & \dots & {}_{(r)}\lambda^{j_r} \end{vmatrix}$$

in (7) eingesetzt

$$(9)\qquad V^2 = \sum_{(i_1 \dots i_r)(j_1 \dots j_r)} \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & \dots & g_{i_r j_1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i_1 j_r} & \dots & g_{i_r j_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{i_1} & \dots & {}_{(1)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda^{i_1} & \dots & {}_{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{j_1} & \dots & {}_{(1)}\lambda^{j_r} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda^{j_1} & \dots & {}_{(r)}\lambda^{j_r} \end{vmatrix},$$

wo in der Summe rechts jede Kombination $(i_1 \dots i_r)$ und $(j_1 \dots j_r)$ gerade je einmal auftritt. Da $V^2 \geqq 0$ ist und $= 0$ nur, wenn der Tensor

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{i_1} & {}_{(1)}\lambda^{i_2} & \dots & {}_{(1)}\lambda^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ {}_{(r)}\lambda^{i_1} & {}_{(r)}\lambda^{i_2} & \dots & {}_{(r)}\lambda^{i_r} \end{vmatrix}$$

verschwindet, ist $V^2$ eine positiv definite quadratische Form dieses Plückerschen Tensors.[1])

Ist ${}_{(\alpha)}\sigma_i$ ein normiertes $n$-Bein im Punkte $P$, so gilt, wie wir wissen,

$$(11)\qquad g_{ik} = {}_{(\alpha)}\sigma_i\,{}_{(\alpha)}\sigma_k.$$

Sind dann $\mu^i$ und $\nu^i$ zwei beliebige Vektoren in $P$, so ist nach (11)

$$(12)\qquad g_{ik}\mu^i\nu^k = \left({}_{(\alpha)}\sigma_i\,\mu^i\right)\left({}_{(\alpha)}\sigma_k\,\nu^k\right).$$

---

1) Allgemein ist
$$\sum_{(i_1 \dots i_r)(j_1 \dots j_r)} \begin{vmatrix} g_{i_1 j_1} & \dots & g_{i_r j_1} \\ \cdot & \dots & \cdot \\ g_{i_1 j_r} & \dots & g_{i_r j_r} \end{vmatrix} \eta^{i_1 \dots i_r}\,\eta^{j_1 \dots j_r}$$
eine positiv definite quadratische Form des allgemeinen alternierenden Tensors $\eta^{i_1 \dots i_r}$. Man überzeugt sich davon leicht durch Einführung spezieller Koordinaten, für die *im betrachteten Punkt* $g_{ik} = \delta_{ik}$ ist.

Ferner gilt die Darstellung

(13) $$\mu_i = g_{ik}\mu^k = {}_{(\alpha)}\sigma_k \mu^k {}_{(\alpha)}\sigma_i = {}_{(\alpha)}\mu\, {}_{(\alpha)}\sigma_i, \quad \nu_i = {}_{(\alpha)}\nu\, {}_{(\alpha)}\sigma_i,$$

wo die Darstellungszahlen

(14) $${}_{(\alpha)}\mu = {}_{(\alpha)}\sigma_k \mu^k, \quad {}_{(\alpha)}\nu = {}_{(\alpha)}\sigma_k \nu^k$$

*die Beinkomponenten der Vektoren* $\mu^i$ *und* $\nu^i$ *in bezug auf das normierte Bein* ${}_{(\alpha)}\sigma_i$ heißen. Nach (12) gilt dann

(15) $$g_{ik}\mu^i \nu^k = {}_{(\alpha)}\mu\, {}_{(\alpha)}\nu.$$

Mittels der Beinkomponenten in bezug auf ein normiertes $n$-Bein werden demnach die Längen und Winkel von Vektoren „euklidisch" gemessen, d. h. wie in einem auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen $R_n$. Insbesondere erhält $V^2$ (6) die Form

(16) $$V^2 = \begin{vmatrix} ({}_{(\alpha)}\sigma_i\, {}_{(1)}\lambda^i)({}_{(\alpha)}\sigma_k\, {}_{(1)}\lambda^k) & \cdots & ({}_{(\alpha)}\sigma_i\, {}_{(1)}\lambda^i)({}_{(\alpha)}\sigma_k\, {}_{(r)}\lambda^k) \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ ({}_{(\alpha)}\sigma_i\, {}_{(r)}\lambda^i)({}_{(\alpha)}\sigma_k\, {}_{(1)}\lambda^k) & \cdots & ({}_{(\alpha)}\sigma_i\, {}_{(r)}\lambda^i)({}_{(\alpha)}\sigma_k\, {}_{(r)}\lambda^k) \end{vmatrix}.$$

Ohne diesen Ausdruck weiter zu entwickeln, sei jetzt ${}_{(\alpha)}\sigma_i$ so konstruiert, daß seine $r$ ersten Vektoren gerade den Vektorraum der ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ aufspannen; dann ist

$${}_{(\alpha)}\sigma_i\, {}_{(\beta)}\lambda^i = 0$$

für $\alpha > r$ und die Determinante (16) wird eine Quadratdeterminante

(17) $$V^2 = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\sigma_i\, {}_{(1)}\lambda^i & {}_{(1)}\sigma_i\, {}_{(2)}\lambda^i & \cdots & {}_{(1)}\sigma_i\, {}_{(r)}\lambda^i \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ {}_{(r)}\sigma_i\, {}_{(1)}\lambda^i & {}_{(r)}\sigma_i\, {}_{(2)}\lambda^i & \cdots & {}_{(r)}\sigma_i\, {}_{(r)}\lambda^i \end{vmatrix}^2.$$

Der Vergleich mit (2, 44) zeigt, daß der dort auftretende Faktor bis auf das Vorzeichen [da dort ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 1, \ldots, t)$ ein normiertes, den $t$ dimensionalen Vektorraum ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha = 1, \ldots, t)$ aufspannendes $t$-Bein ist] das *Beinvolumen* der $t$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\underline{\mu}_i$ ist.

## § 4. Die $l$ dimensionalen Mannigfaltigkeiten des $R_n$.

Es sei

(1) $$x_i = x_i(t) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

eine stetig differenzierbare Kurve $C$ im $R_n$, bezogen auf den Parameter $t$. Das Integral

(2) $$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{g_{ik}\frac{dx_i}{dt}\frac{dx_k}{dt}}\, dt$$

vom Punkt $P_0 (t = t_0)$ von $C$ längs $C$ nach $P(t)$ integriert, heißt die *Länge* des Kurvenbogens $\overline{P_0 P}$. Diese Größe hängt nur vom Kurvenbogen $\overline{P_0 P}$ ab und nicht vom Parameter $t$, auf den $C$ bezogen ist. Bei Fixierung von $P_0$ wird $s$ eine Funktion des Parameters $t$ von $P$, für die nach (2)

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt}} \tag{2'}$$

gilt. War $t$ bereits die von irgendeinem festen Punkt aus gemessene Bogenlänge, also $t = s + c$, wo $c$ konstant ist, so folgt aus (2')

$$g_{ik} \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_k}{dt} = 1. \tag{3}$$

Beziehen wir also eine Kurve $C$ auf ihre Bogenlänge als Parameter, so wird

$$\underset{(1)}{\xi}{}^i = \frac{dx_i}{ds} \tag{4}$$

ein Einheitsvektor, der *Tangentenvektor* oder *Richtungsvektor* von $C$ im betrachteten Punkte heißt.

Ist $\Phi = f(x_1, \ldots, x_n)$ ein im (integrablen) Gebiete $G$ definierter stetiger Skalar, so ist das über dieses Gebiet erstreckte $n$fache Integral

$$J = \int \sqrt{g}\, \Phi \, dx_1 \, dx_2 \ldots dx_n, \tag{5}$$

die Wurzel positiv genommen, eine Invariante. Im Koordinatensysteme $\bar{x}_i$, $x_i = \varphi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, berechnet sich $J$ in der Form

$$J = \int \sqrt{g}\, \Phi \left| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} \right| d\bar{x}_1 \ldots d\bar{x}_n, \tag{6}$$

wo $\sqrt{g}\,\Phi$ nunmehr als Funktion der $\bar{x}_i$ zu gelten hat, und $\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)}$ die Funktionaldeterminante der Transformation

$$x_i = \varphi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \tag{7}$$

ist. Aber aus

$$\bar{g}_{pq} = g_{ik} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \bar{x}_p} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \bar{x}_q} \tag{8}$$

folgt

$$\bar{g} = g \left( \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} \right)^2, \tag{9}$$

also
$$\left| \sqrt{\bar{g}} \right| = \left| \sqrt{g} \right| \left| \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)} \right|.$$

Wir erhalten daher aus (6)

$$J = \int \sqrt{\bar{g}}\, \Phi \, d\bar{x}_1 \ldots d\bar{x}_n, \tag{10}$$

die Wurzel positiv genommen; womit die Invarianz von $J$ bewiesen ist. Setzen wir $\Phi = 1$, so bezeichnet man die Invariante

$$V = \int \sqrt{g}\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{11}$$

die Wurzel positiv genommen, als *das Volumen des n dimensionalen Gebietes G*, über das integriert wird.

Wir wenden uns nun zu den $l$ dimensionalen Mannigfaltigkeiten $F_l$ des $R_n$ und beweisen zuerst den Hilfssatz:

*Sind in einem Gebiete des $R_n$ die $m$ stetig differenzierbaren Funktionen*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) \tag{12}$$

*definiert, so ist die Anzahl der unabhängigen Funktionen der Reihe* (12) *in diesem Gebiete gleich dem Rang der Matrix*

$$\left|\begin{matrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{matrix}\right|. \tag{13}$$

Hat in einem Punkte $P_0$ dieses Gebietes und in der Umgebung von $P_0$ die Matrix (13) den Rang $m$, so kann man das System

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_1, \; f_2(x_1, \ldots, x_n) = f_2, \; \ldots, \; f_m(x_1, \ldots, x_n) = f_m, \tag{14}$$

wenn z. B. im Punkte $P_0$

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, m) \tag{15}$$

ist, nach $x_1, \ldots, x_m$ auflösen:

$$x_1 = x_1(f_1, \ldots, f_m, x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, x_m = x_m(f_1, \ldots, f_m, x_{m+1}, \ldots, x_n). \tag{16}$$

Dabei gilt (16) in einer Umgebung von $P_0(f_1^0, \ldots, f_m^0, x_{m+1}^0, \ldots, x_n^0)$. In dieser Umgebung ist der $R_n$ durch die neuen Koordinaten $f_1, \ldots, f_m$, $x_{m+1}, \ldots, x_n$ beschrieben, die also unabhängig sind. Wir haben damit in Erinnerung gebracht, daß die $m$ Funktionen (12) *sicher unabhängig* sind, wenn die Matrix (13) den Rang $m$ hat.

Ist $r \leqq m$ der Rang der Matrix (13), so können wir bei eventueller Umnumerierung erreichen, daß

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \neq 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, r) \tag{17}$$

ist. (Dies alles gilt für den Punkt $P_0$ und dessen Umgebung!) Nach dem eben Gesagten sind die $r$ Funktionen $f_1, \ldots, f_r$ dann sicher unabhängig. Wir betrachten nun in $P_0$ und Umgebung das folgende System von $n - r$ (unabhängigen) linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung für die unbekannte Funktion $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$

(18)
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \Phi}{\partial x_r} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_i} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_i} & \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \frac{\partial f_r}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial x_r} \end{vmatrix} = 0 \qquad (i = r+1, \dots, n).$$

Ein solches System hat höchstens $n-(n-r) = r$ unabhängige Lösungen (es heißt dann *vollständig*) und jede weitere Lösung ist eine Funktion dieser unabhängigen Lösungen.[1]) Nun ist infolge der Voraussetzung betreffs des Ranges von (13) jede der $m$ Funktionen (12) eine Lösung von (18), und zwar sind $f_1, \dots, f_r$ gerade $r$ unabhängige Lösungen. Also ist in der Tat

(19)
$$f_i = f_i(f_1, \dots, f_r) \qquad (i = r+1, \dots, m),$$

womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Eine durch $l$ Parameter $y_1, \dots, y_l$ in der Parameterdarstellung

(20)
$$x_i = x_i(y_1, \dots, y_l)$$

gegebene Punktmenge des $R_n$ *heißt $l$ dimensionale Hyperfläche, auch $l$ dimensionale Mannigfaltigkeit,* wenn die $x_i(y_1, \dots, y_n)$ stetig differenzierbare Funktionen der Parameter $y_1, \dots, y_l$ sind und wenn sich diese Punktmenge nicht durch weniger als $l$ Parameter in der Form (20) darstellen läßt. Sind die Funktionen $x_i(y_1, \dots, y_l)$ in (20) stetig differenzierbar, so kann (20) nur dann eine $l$ dimensionale Hyperfläche $F_l$ darstellen, wenn die Matrix

(21)
$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_l} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_l} \end{Vmatrix}$$

den Rang $l$ hat. Dies folgt aus dem eben bewiesenen Hilfssatz für die $n$ Funktionen $x_i(y_1, \dots, y_l)$ der $l$ Variablen (wobei jetzt $m = n$, $n = l$ zu setzen ist).

Wir denken uns nun die Koordinaten so numeriert, daß in $P_0$

(21')
$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right| \neq 0 \qquad (i, j = 1, \dots, l)$$

ist; dann lassen sich in einer Umgebung von $P_0(y_1^0, \dots, y_l^0)$ die $x_i(y_1, \dots, y_l) = x_i$ $(i = 1, \dots, l)$ nach den $y_t$ $(t = 1, \dots, l)$ auflösen:

(22)
$$y_t = y_t(x_1, \dots, x_l) \qquad (t = 1, \dots, l).$$

1) Vgl. etwa Serret-Scheffers, *Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung,* Bd. 3, S. 365 ff.

Die Relationen (22) gelten in einer gewissen Umgebung der Stelle $x_i^0 = x_i(y_1^0, \ldots, y_l^0)$, und die $y_t(x_1, \ldots, x_l)$ sind stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente. Ferner folgt aus (20) und (22) (für diese Umgebung von $P_0$), *daß die Zuordnung der Punkte der $F_l$ zu den $l$-Tupeln $y_1, \ldots, y_l$ eineindeutig ist.*

Sei jetzt

$$x_i = \bar{x}_i(z_1, \ldots, z_k) \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{23}$$

wo die $x_i$ stetig differenzierbare Funktionen sind, eine zweite Darstellung der Mannigfaltigkeit (20) in der Umgebung von $P_0(z_1^0, \ldots, z_k^0)$; dabei besitze die (21) entsprechende Matrix den Rang $k$. Dann lassen sich, wie eben gezeigt wurde, die $z_1, \ldots, z_k$ durch $k$ der $x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ darstellen:

$$z_s = z_s(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}), \tag{24}$$

wobei die $z_s$ stetig differenzierbare Funktionen von $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_k}$ sind. Aus (20), (22), (23) und (24) erhalten wir dann in $P_0$ und Umgebung

$$y_t = y_t(z_1, \ldots, z_k) \qquad (t = 1, \ldots, l) \tag{25}$$

$$z_s = z_s(y_1, \ldots, y_l) \qquad (s = 1, \ldots, k) \tag{25'}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $y_t(z_1, \ldots, z_k)$ und $z_s(y_1, \ldots, y_l)$. Wegen

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_t} = \frac{\partial x_i}{\partial z_h}\frac{\partial z_h}{\partial y_t} \tag{26}$$

ist

$$\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_t} \right\| = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial z_h}{\partial y_t} \right\| .$$

Die Matrix $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_t} \right\|$ hat demnach höchstens den Rang $k$ der Matrix $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial z_h} \right\|$, d. h. es ist $l \leqq k$. Ebenso zeigt man, daß $l \geqq k$ ist, d. h. es gilt $l = k$. *Somit ist notwendig und hinreichend, damit* (20) *eine $F_l$ darstellt, daß die Matrix* (21) *den Rang $l$ besitzt.*

Gleichzeitig gewinnen wir aus (25) und (25′) die Transformationsgleichungen für zwei *dieselbe* $F_l$ darstellende Parametersysteme in der Form

$$\begin{cases} y_t = y_t(z_1, \ldots, z_l) \\ z_t = z_t(y_1, \ldots, y_l) \end{cases} \qquad (t = 1, \ldots, l) \tag{27}$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $y_t(z_1, \ldots, z_l)$ und $z_t(y_1, \ldots, y_l)$. Die Funktionaldeterminanten

$$\left| \frac{\partial y_t}{\partial z_h} \right|, \qquad \left| \frac{\partial z_t}{\partial y_h} \right| \tag{28}$$

sind demnach von Null verschieden.

Wir notieren ferner das wichtige Ergebnis: Für jeden Punkt $P_0$ der $F_l$ gibt es eine auf der $F_l$ gelegene Umgebung von $P_0$, deren Punkte sich durch

(29) $$x_i = x_i(x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_l}) \qquad (i=1,\ldots,n)$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $x_i(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l})$ darstellen lassen, wobei noch $x_{\alpha_j}(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_l}) = x_{\alpha_j}$ $(j=1,\ldots,l)$ ist.

Eine $l$ dimensionale Mannigfaltigkeit $F_l$ ist nichts anderes als ein $l$ dimensionaler Raum $R_l$, wie er in I, § 1 mit größerer Ausführlichkeit besprochen wurde. Wir wollen nun wie dort die Annahme machen, *es wäre sinnvoll, in diesem $R_l$ von $\varrho$ fach stetig differenzierbaren Funktionen der Punkte des $R_l$ zu sprechen.*[1]) Dadurch wird eine Gesamtheit *zulässiger Parametersysteme* $\{y_1, \ldots, y_l\}$ der $F_l$ herausgegriffen, in bezug auf welche die $\varrho$ fach stetig differenzierbaren Funktionen der Punkte der $F_l$ stetige Ableitungen bis einschließlich zur $\varrho$ ten Ordnung besitzen. Von einem zulässigen Parametersystem $\{y_1, \ldots, y_l\}$ zu einem zweiten $\{z_1, \ldots, z_l\}$ führt eine Transformation (27), in der die auftretenden Funktionen $\varrho$ fach stetig differenzierbar sind.

Nun sind die Punkte dieser $F_l$ im $R_n$ enthalten, also wird eine in jedem Punkte des $R_n$ definierte Funktion der Punkte des $R_n$ in der $F_l$ zu einer Funktion der Punkte dieser $F_l$ führen. Dabei sollen sich die Stetigkeitsverhältnisse in der Art übertragen, *daß jede $\varrho$ fach stetig differenzierbare Funktion der Punkte des $R_n$, als Funktion in der $F_l$ betrachtet, ebenfalls $\varrho$ fach stetig differenzierbar ist.* Ist der $R_n$ auf $m$-Systeme bezogen, so kann demnach $\varrho$ höchstens gleich $m$ sein. Da die Koordinaten eines $m$-Systems $m$ fach stetig differenzierbare Funktionen im $R_n$, also wegen $\varrho \leqq m$ $\varrho$ fach stetig differenzierbare Funktionen im $R_n$ sind, so werden sie in der $F_l$ $\varrho$ fach stetig differenzierbare Funktionen in bezug auf jedes zulässige Parametersystem sein. Ist (20) eine solche, auf zulässige Parameter bezogene $F_l$, so müssen die Funktionen $x_i(y_1, \ldots, y_l)$ demnach $\varrho$ fach stetig differenzierbar sein. *Eine $F_l$ dieser Eigenschaft wollen wir eine $\varrho$ fach stetig differenzierbare $F_l$ nennen.* In einer solchen hat es demnach einen Sinn, von $\sigma$ fach stetig differenzierbaren Funktionen der $F_l$ zu sprechen, wenn $\sigma \leqq \varrho$ ist. Insbesondere sind die $\sigma$ fach stetig differenzierbaren Funktionen des $R_n$ ebensolche Funktionen in der $F_l$.

Sei $x_i = x_i(t)$ eine stetig differenzierbare Kurve des $R_n$, die ganz in der $F_l$ (20) liegt. Wegen (22) sind dann die $y_h = y_h(x_1, \ldots, x_l)$ $(h=1,\ldots,l)$ stetig differenzierbare Funktionen des Kurvenparameters $t$; also erhalten wir die allgemeinste stetig differenzierbare Raumkurve, die in der $F_l$ liegt, in der Parameterdarstellung $y_h = y_h(t)$ $(h=1,\ldots,l)$ mit stetig differenzierbaren $y_h(t)$. Ist die $F_l$ $\varrho$ fach stetig differenzierbar, so sind die $y_h(x_1, \ldots, x_l)$ in (22)

1) Besser von $\sigma$ fach stetig differenzierbaren Funktionen, wo $\sigma \leqq \varrho$ ist.

ebenfalls $\varrho$ fach stetig differenzierbar und jede $\tau$ fach ($\tau \leqq \varrho$) stetig differenzierbare Kurve $x_i = x_i(t)$ des $R_n$, die in der $F_l$ liegt, hat in der $F_l$ die Parameterdarstellung $y_h = y_h(t)$ $(h = 1, \ldots, l)$ mit $\tau$ fach stetig differenzierbaren $y_h(t)$.

Betrachten wir die Gesamtheit aller stetig differenzierbaren Kurven der $F_l$, die durch $P$ gehen, so spannen ihre Tangentenvektoren in $P$ einen Vektorraum auf, der *Tangentenvektorraum der $F_l$ in $P$* genannt wird. Ist

$$x_i = x_i(y_1(t), \ldots, y_l(t))$$

eine solche Kurve, so gilt in $P$

(30)
$$\frac{d x_i}{dt} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \frac{d y_\alpha}{dt} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, l).$$

Der Tangentenvektorraum in $P$ wird nach (30) von den $l$ Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, l)$ aufgespannt, die wegen des Ranges der Matrix (21) linear unabhängig sind. Er ist somit $l$ dimensional.

Wir sagen, *ein Vektor $\lambda$ des Punktes $P$ der $F_l$ liegt in der $F_l$* oder *ist ein Flächenvektor*, wenn er im Tangentenvektorraum der $F_l$ in $P$ liegt. Seine kontravarianten Komponenten $\lambda^i$ haben demnach die Darstellung

(31)
$$\lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} l^\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, l).$$

Hält man die Raumkoordinaten fest und transformiert nur die Parameter

(32)
$$\bar{y}_\alpha = \bar{y}_\alpha(y_1, \ldots, y_l) \qquad (\alpha = 1, \ldots, l),$$

so ändern sich die Raumkomponenten $\lambda^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ natürlich nicht. Daher gilt

(33)
$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \bar{l}^\alpha = \frac{\partial x_i}{\partial y_\beta} l^\beta = \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \frac{\partial \bar{y}_\alpha}{\partial y_\beta} l^\beta \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, l)$$

oder

(34)
$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \left( \bar{l}^\alpha - \frac{\partial \bar{y}_\alpha}{\partial y_\beta} l^\beta \right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n,\ \alpha, \beta = 1, \ldots, l).$$

Da der Rang der Matrix $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_\alpha} \right\|$ gleich $l$ ist, folgt aus (34)

(35)
$$\bar{l}^\alpha = \frac{\partial \bar{y}_\alpha}{\partial y_\beta} l^\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, l)$$

Die in (31) auftretenden Darstellungszahlen $l^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, l)$ des Flächenvektors $\lambda^i$ bilden somit das Komponentensystem eines in der $F_l$ ($\equiv R_l$) in $P$ definierten kontravarianten Vektors

(36)
$$y_1, \ldots, y_l;\quad l^1, \ldots, l^l.$$

Bezüglich der Transformationen der Koordinaten $x_i$ im $R_n$ sind dagegen die Größen $l^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, l)$ Skalare. Ebenso folgt aus der Invarianz der $x_i(y_1, \ldots, y_l) = \bar{x}_i(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l)$ in bezug auf Parametertransformationen, daß

(37)
$$\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} = {}_{(i)}\lambda_\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha = 1, \ldots, l)$$

ein System von $n$ kovarianten Vektoren der $F_l$ darstellt. Bezüglich der Koordinatentransformationen des $R_n$ stellen die Größen (37) $l$ kontravariante Vektoren dar, die den Tangentenvektorraum aufspannen. Derartige Größen werden wir in VII ausführlicher behandeln.

Für den Flächenvektor $\lambda^i$ (31) ist

$$g_{ik}\lambda^i\lambda^k = g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}l^\alpha l^\beta = \gamma_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta \tag{38}$$

eine Invariante, also

$$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\beta\alpha} = g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, l) \tag{39}$$

bezüglich der Parametertransformationen das Komponentensystem eines symmetrischen, positiv definiten, kovarianten Tensors zweiter Stufe, der als *Maßtensor der $F_l$* anzusehen ist: Er ist positiv definit, denn $\gamma_{\alpha\beta}l^\alpha l^\beta = 0$ hat nach (38) $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}l^\alpha = 0$ zur Folge, woraus wegen der Unabhängigkeit der $l$ Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}$ sofort $l^\alpha = 0$ folgt. Für zwei Flächenvektoren $\lambda^i$ und $\mu^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}m^\alpha$ folgt aus (39)

$$g_{ik}\lambda^i\mu^k = \gamma_{\alpha\beta}l^\alpha m^\beta. \tag{40}$$

Nennen wir $l^\alpha$ $(\alpha = 1, \ldots, l)$ *die kontravarianten Flächenkomponenten* des Flächenvektors $\lambda^i$ $(i = 1, \ldots, n)$, so zeigt (40), daß man Längen und Winkel von Flächenvektoren mittels dieser Flächenkomponenten und des Maßtensors $\gamma_{\alpha\beta}$ der $l$ dimensionalen Mannigfaltigkeit in der üblichen Art zu berechnen hat. *Die Metrik des $R_n$ induziert somit auch in der Hyperfläche $F_l$ eine Metrik,* so daß diese ebenfalls ein ($l$ dimensionaler) RIEMANNscher Raum wird.

Aus (31) folgt durch Überschiebung mit $g_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}$ wegen (39)

$$\lambda_k\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} = l_\beta \qquad (k = 1, \ldots, n,\ \beta = 1, \ldots, l); \tag{41}$$

in dieser Weise hängen die kovarianten Raumkomponenten $\lambda_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ und die kovarianten Flächenkomponenten des Flächenvektors $\lambda$ (31) zusammen.

Als *Volumen eines $l$ dimensionalen integrablen Raumstückes der $F_l$* definieren wir jetzt

$$V = \int\sqrt{\gamma}\,dy_1 \ldots dy_l, \tag{42}$$

erstreckt über dieses Raumstück. Dabei ist $\gamma = |\gamma_{\alpha\beta}|$. Man beachte, daß $\gamma_{\alpha\beta}$ (39) vom Koordinatensystem $x_i$ nicht abhängt, so daß $V$ eine Invariante gegenüber Parameter- und Raumtransformationen ist.[1])

Wir wollen noch, mehr als Übung zu dem bisher Gesagten, den *Projektionstensor und den normierten Plückerschen Tensor des Tangentenvektorraumes*

---

1) Die Formeln (2) und (11) sind Sonderfälle von (42) für $l = 1$ und $l = n$.

*eines Punktes $P$ der $F_l$* aufstellen. Sind ${}_{(\alpha)}l^t$ $(t, \alpha = 1, \ldots, l)$ die kontravarianten Flächenkomponenten eines normierten $l$-Beins der $F_l$, so sind

$$(43) \qquad {}_{(\alpha)}\lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_t}\,{}_{(\alpha)}l^t \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha, t = 1, \ldots, l)$$

die kontravarianten Raumkomponenten dieser $l$ Flächenvektoren. Wegen

$$(44) \qquad \gamma^{ts} = {}_{(\alpha)}l^t\,{}_{(\alpha)}l^s \qquad (\alpha, t, s = 1, \ldots, l),$$

wo $\gamma^{ts}$ der kontravariante Maßtensor der $F_l$ ist, erhalten wir für den Projektionstensor

$$(45) \qquad p^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\alpha)}\lambda^k = \frac{\partial x_i}{\partial y_t}\frac{\partial x_k}{\partial y_s}\gamma^{ts},$$

da ja ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ wegen (40) ein normiertes $l$-Bein im $R_n$ ist.

Für den normierten Plückerschen Tensor

$$\begin{vmatrix} {}_{(1)}\lambda^{i_1} & \ldots & {}_{(1)}\lambda^{i_l} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ {}_{(l)}\lambda^{i_1} & \ldots & {}_{(l)}\lambda^{i_l} \end{vmatrix} = \pi^{i_1 \ldots i_l}$$

erhalten wir

$$(46) \qquad \pi^{i_1 i_2 \ldots i_l} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_l} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_l} & \ldots & \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_l} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}_{(1)}l^1 & {}_{(2)}l^1 & \ldots & {}_{(l)}l^1 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ {}_{(1)}l^l & {}_{(2)}l^l & \ldots & {}_{(l)}l^l \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_1} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_1} & \ldots & \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_l} & \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_l} & \ldots & \frac{\partial x_{i_l}}{\partial y_l} \end{vmatrix},$$

$(\gamma = |\gamma_{ik}|)$. Aus $\gamma^{ik} = {}_{(\alpha)}l^i\,{}_{(\alpha)}l^k$ folgt ja $|{}_{(\alpha)}l^i| = \sqrt{\gamma^{-1}}$ (es ist $|\gamma^{ik}|\,|\gamma_{ik}| = 1$).

# IV. Formeln von Frenet. Der euklidische Raum

## § 1. Kurven im Riemannschen $R_n$.

Wir denken uns eine Kurve $C$ in der Parameterdarstellung

$$(1) \qquad x_i = x_i(s)$$

gegeben, wo $s$ die von einem festen Punkt $P_0$ aus gemessene Bogenlänge von $C$ ist. Die Funktionen $x_i(s)$ seien zweimal stetig differenzierbar. In jedem Punkt von $C$ sei weiter ein stetig differenzierbarer Einheitsvektor ${}_{(1)}\eta^i$ definiert, z. B. ${}_{(1)}\eta^i = \frac{d x_i}{d s}$. Aus

$$(2) \qquad g_{ik}\,{}_{(1)}\eta^i\,{}_{(1)}\eta^k = 1$$

folgt dann wegen $\mathfrak{d} g_{ik} = 0$ durch absolute Differentiation nach $s$

$$(2') \qquad \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} s}\left(g_{ik}\,{}_{(1)}\eta^i\,{}_{(1)}\eta^k\right) = 2 g_{ik} \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\eta^i}{\mathfrak{d} s}\,{}_{(1)}\eta^k = 0.$$

Der längs $C$ definierte stetige Vektor $\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(2)}\eta^i}{\mathfrak{d} s}$ steht somit auf ${}_{(1)}\eta^i$ normal.[1]) Durch die Tensorrelation

$$(3) \qquad \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\eta^i}{\mathfrak{d} s} = \frac{{}_{(2)}\eta^i}{\sigma_1},$$

wo $\frac{1}{\sigma_1}$ ein skalarer Normierungsfaktor ist, definieren wir den Einheitsvektor ${}_{(2)}\eta^i$, der auf ${}_{(1)}\eta^i$ normal steht und in die Richtung $\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\eta^i}{\mathfrak{d} s}$ oder in die entgegengesetzte $-\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\eta^i}{\mathfrak{d} s}$ fällt, je nachdem $\sigma_1^{-1}$ positiv oder negativ gewählt wird. Der Normierungsfaktor

$$(3') \qquad \frac{1}{\sigma_1} = \sqrt{g_{ik} \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\eta^i}{\mathfrak{d} s} \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\eta^k}{\mathfrak{d} s}}$$

ist als Normierungsfaktor eines endlichen Vektors stets endlich. Nur im Falle $\frac{1}{\sigma_1} = 0$ versagt die zu ${}_{(2)}\eta^i$ führende Konstruktion, da dann $\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\eta^i}{\mathfrak{d} s} = 0$ und ${}_{(2)}\eta^i$ in (3) unbestimmt ist. In $P_0$ entscheiden wir nun willkürlich betreffs des Vorzeichens der Wurzel in (3′), treffen aber dann die Vereinbarung, daß ${}_{(2)}\eta^i$

---

1) Der Maßtensor $g_{ik}$ wird als $n$mal stetig differenzierbar vorausgesetzt.

längs $C$ stetig variiere, wodurch dann längs $C$ das Vorzeichen von $\sigma_1^{-1}$ festgelegt ist.[1])

Ist ${}_{(2)}\eta^i$ längs $C$ noch stetig differenzierbar, so können wir einen dritten Vektor ${}_{(3)}\eta^i$ längs $C$ konstruieren, der mit ${}_{(1)}\eta^i$ und ${}_{(2)}\eta^i$ ein normiertes Dreibein bildet. Aus $g_{ik}\,{}_{(2)}\eta^i\,{}_{(2)}\eta^k = 1$ folgt wie oben, daß der stetige Vektor $\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(2)}\eta^i}{\mathfrak{d}s}$ auf ${}_{(2)}\eta^i$ normal steht. Bezeichnen wir mit ${}_{(3)}\bar{\eta}^i$ die Projektion von $\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(2)}\eta^i}{\mathfrak{d}s}$ in den Normalraum von ${}_{(1)}\eta^i$, so gilt

$$\text{(4)}\qquad \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(2)}\eta^i}{\mathfrak{d}s} = A\,{}_{(1)}\eta^i + {}_{(3)}\bar{\eta}^i,$$

wo ${}_{(1)}\eta_i\,{}_{(3)}\bar{\eta}^i = 0$ ist. Durch Überschiebung von (4) mit ${}_{(1)}\eta_i$ folgt wegen ${}_{(1)}\eta_i\,{}_{(2)}\eta^i = 0$

$$\text{(5)}\qquad A = {}_{(1)}\eta_i \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(2)}\eta^i}{\mathfrak{d}s} = -\,{}_{(2)}\eta^i \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\eta_i}{\mathfrak{d}s} = -\,{}_{(2)}\eta^i\,{}_{(2)}\eta_i \frac{1}{\sigma_1} = -\frac{1}{\sigma_1}.$$

Durch die Normierung

$$\text{(5')}\qquad {}_{(3)}\bar{\eta}^i = \frac{{}_{(3)}\eta^i}{\sigma_2},$$

wo $\frac{1}{\sigma_2}$ ein skalarer Normierungsfaktor ist, definieren wir nun den auf ${}_{(1)}\eta^i$ und ${}_{(2)}\eta^i$ senkrecht stehenden dritten Einheitsvektor ${}_{(3)}\eta^i$, wobei wie oben das Vorzeichen von $\sigma_2^{-1}$ in $P_0$ wieder willkürlich gewählt werden kann, aber dann, wenn *wir Stetigkeit des Vektors* ${}_{(3)}\eta^i$ *vereinbaren, in allen anderen Punkten von* $C$ *festgelegt ist.*[2]) Der Skalar $\frac{1}{\sigma_2}$ selbst *ist dann längs* $C$ *stetig.* Wir erhalten aus (4), (5), (5')

$$\text{(6)}\qquad \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(2)}\eta^i}{\mathfrak{d}s} = -\frac{{}_{(1)}\eta^i}{\sigma_1} + \frac{{}_{(3)}\eta^i}{\sigma_2}.$$

Die Konstruktion des Vektors ${}_{(3)}\eta^i$ versagt, wenn $\frac{1}{\sigma_2} = 0$ ist; er wird dann unbestimmt. Ist der Vektor ${}_{(3)}\eta^i$ stetig differenzierbar, so ist die Konstruktion fortsetzbar und wir gelangen zu einem vierten Einheitsvektor ${}_{(4)}\eta^i$, der mit ${}_{(1)}\eta^i$, ${}_{(2)}\eta^i$ und ${}_{(3)}\eta^i$ ein normiertes Vierbein bildet. Wir wollen gleich allgemein annehmen, wir hätten schrittweise längs $C$ das normierte $k$-Bein $(k \leqq n)$ *der* $k$ *stetig differenzierbaren* Einheitsvektoren

$$\text{(7)}\qquad {}_{(1)}\eta^i,\ {}_{(2)}\eta^i,\ \ldots,\ {}_{(k)}\eta^i$$

---

1) Dieser Vereinbarung kann man auf einem Bogen von $C$, längs welchem $\sigma_1^{-1}$ nicht verschwindet, sicher nachkommen. Wenn im folgenden von der Kurve $C$ gesprochen wird, so meinen wir einen Bogen derselben, für den ${}_{(2)}\eta^i$ stetig bestimmbar ist.

2) Dieser Vereinbarung kann man auf einem Bogen von $C$, längs welchem $\sigma_2^{-1}$ nicht verschwindet, sicher nachkommen, da ${}_{(3)}\bar{\eta}^i$ nach (4), (5) und (3') ein stetiger Vektor ist, dessen Länge $\pm\sigma_2^{-1}$ auf einem solchen Bogen stetig und ungleich Null ist, und da nach (5') ${}_{(3)}\eta^i = {}_{(3)}\bar{\eta}^i : \sigma_2^{-1}$ ist. Wenn im folgenden von der Kurve $C$ gesprochen wird, so meinen wir einen Bogen derselben, für den ${}_{(2)}\eta^i$ und ${}_{(3)}\eta^i$ stetig bestimmbar sind.

konstruiert, das den Relationen

$$\frac{\mathfrak{d}_{(j)}\eta^i}{\mathfrak{d}s} = -\frac{{}_{(j-1)}\eta^i}{\sigma_{j-1}} + \frac{{}_{(j+1)}\eta^i}{\sigma_j} \qquad \left(j = 1, \ldots, k-1;\ \frac{1}{\sigma_0} = 0\right) \tag{8}$$

genügt, wobei die Skalare $\sigma_j^{-1}$ stetige Funktionen von $s$ sind. Wir können dann einen $k+1$ ten Einheitsvektor so konstruieren, daß für das normierte $k+1$-Bein ${}_{(\alpha)}\eta^i$ $(\alpha = 1, \ldots, k+1)$ die Relationen (8) gelten. Aus $g_{ij\,(k)}\eta^i{}_{(k)}\eta^j = 1$ (nicht summieren über $k$!) folgt durch absolute Differentiation, daß der stetige Vektor $\frac{\mathfrak{d}_{(k)}\eta^i}{\mathfrak{d}s}$ längs $C$ auf ${}_{(k)}\eta^i$ normal steht. Bezeichnen wir mit ${}_{(k+1)}\bar{\eta}^i$ die Projektion von $\frac{\mathfrak{d}_{(k)}\eta^i}{\mathfrak{d}s}$ in den Normalvektorraum des Vektorraumes $\{{}_{(1)}\eta^i, {}_{(2)}\eta^i, \ldots, {}_{(k-1)}\eta^i\}$, so gilt die Darstellung

$$\frac{\mathfrak{d}_{(k)}\eta^i}{\mathfrak{d}s} = \sum_{\alpha=1}^{k-1} {}_{(\alpha)}A\,{}_{(\alpha)}\eta^i + {}_{(k+1)}\bar{\eta}^i, \tag{9}$$

wo also ${}_{(\alpha)}\eta_i\,{}_{(k+1)}\bar{\eta}^i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, k-1)$ ist. Überschiebt man (9) mit ${}_{(j)}\eta_i$ $(j = 1, \ldots, k-1)$, so folgt

$$ {}_{(j)}A = {}_{(j)}\eta_i \frac{\mathfrak{d}_{(k)}\eta^i}{\mathfrak{d}s} = -{}_{(k)}\eta^i \frac{\mathfrak{d}_{(j)}\eta_i}{\mathfrak{d}s} = -{}_{(k)}\eta^i \left[-\frac{{}_{(j-1)}\eta_i}{\sigma_{j-1}} + \frac{{}_{(j+1)}\eta_i}{\sigma_j}\right] = \frac{\delta_{k\,j-1}}{\sigma_{j-1}} - \frac{\delta_{k\,j+1}}{\sigma_j}. \tag{10}$$

Also ist ${}_{(j)}A = 0$ $(j = 1, \ldots, k-2)$, dagegen ${}_{(k-1)}A = -\frac{1}{\sigma_{k-1}}$.

Durch die Normierung

$$ {}_{(k+1)}\bar{\eta}^i = \frac{{}_{(k+1)}\eta^i}{\sigma_k}, \tag{10'}$$

wo $\frac{1}{\sigma_k}$ ein skalarer Normierungsfaktor ist, definieren wir den auf ${}_{(\alpha)}\eta^i$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$ senkrechten $k+1$ ten Einheitsvektor ${}_{(k+1)}\eta^i$. Dabei ist in $P_0$ das Vorzeichen von $\sigma_k^{-1}$ willkürlich gewählt, aber dann, durch die Vereinbarung über die *Stetigkeit des Vektors* ${}_{(k+1)}\eta^i$ (${}_{(k+1)}\bar{\eta}^i$ ist stetig!) in allen anderen Punkten von $C$ festgelegt.[1]) Der Skalar $\sigma_k^{-1}$ ist dann längs $C$ selbst stetig. Aus (9), (10) und (10′) erhalten wir

$$\frac{\mathfrak{d}_{(k)}\eta^i}{\mathfrak{d}s} = -\frac{{}_{(k-1)}\eta^i}{\sigma_{k-1}} + \frac{{}_{(k+1)}\eta^i}{\sigma_k}. \tag{11}$$

Wir können also die Konstruktion bis zu einem normierten $n$-Bein fortsetzen, wenn wir nicht wegen Nichtdifferenzierbarkeit des zuletzt erhaltenen Vektors (hier ${}_{(k+1)}\eta^i$) oder wegen des Verschwindens des letzten Normierungsfaktors $\frac{1}{\sigma_k}$ einmal zum Stillstand kommen. Da $\frac{\mathfrak{d}_{(n)}\eta^i}{\mathfrak{d}s}$ durch das normierte $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\eta^i$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$ dargestellt werden kann, ist $\frac{1}{\sigma_n} = 0$. Gelangen wir zur Konstruktion eines $n$-Beines ${}_{(\alpha)}\eta^i$, so gelten die Relationen (8) für $(j = 1, \ldots, n)$ mit $\sigma_0^{-1} = \sigma_n^{-1} = 0$.

1) Vgl. die beiden vorhergehenden Anmerkungen.

Den Fall der Nichtdifferenzierbarkeit des letztgenannten Vektors wollen wir nicht weiter diskutieren, also annehmen, daß ein vorzeitiger Abbruch der Konstruktion nur infolge Verschwindens des letztgewonnenen normierenden Skalars eintritt; ist dieser $\sigma_k^{-1}$, so gilt die Relation (8) mit $\sigma_0^{-1} = \sigma_k^{-1} = 0$. Der Fall der Nichtdifferenzierbarkeit tritt übrigens sicher nicht ein, wenn ${}_{(1)}\eta^i$ mindestens $n$-mal stetig differenzierbar ist.

An Stelle des willkürlichen Vektors ${}_{(1)}\eta^i$ nehmen wir nun den *Tangentenvektor* ${}_{(1)}\xi^i = \frac{d x_i}{d s}$ von $C$ und führen, von diesem ausgehend, die obige Konstruktion durch, bezeichnen aber jetzt die Normierungsfaktoren mit $\varrho_\alpha^{-1}$ statt mit $\sigma_\alpha^{-1}$ und die Vektoren des Beins mit ${}_{(\alpha)}\xi^i$. Man nennt ${}_{(\alpha)}\xi^i$ die $\alpha - 1$*te Normale* (genauer *Normalenvektor*) und $\varrho_\alpha^{-1}$ die $\alpha$ *te Krümmung* von $C$. Ist $\varrho_k^{-1} = 0$ die erste verschwindende Krümmung, so führt die obige Konstruktion zu einem $k$-Bein ${}_{(\alpha)}\xi^i$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$, das als *begleitendes k-Bein* von $C$ bezeichnet wird und zwischen dessen Vektoren die Relationen

$$(12) \qquad \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\xi^i}{\mathfrak{d} s} = -\frac{{}_{(\alpha-1)}\xi^i}{\varrho_{\alpha-1}} + \frac{{}_{(\alpha+1)}\xi^i}{\varrho_\alpha}, \quad \varrho_0^{-1} = \varrho_k^{-1} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, k),$$

die sogenannten *Frenetformeln* bestehen. Die Zahl $k$ ist für die Kurve $C$ charakteristisch und kann jeden Wert von 1 bis $n$ annehmen. Auf eine einfache Deutung von $k$ bei Kurven im euklidischen $R_n$ kommen wir in § 3 zu sprechen. Bemerkt sei noch, daß man das begleitende $k$-Bein $(k < n)$ stets durch weitere $n - k$ längs $C$ definierte Einheitsvektoren ${}_{(\alpha)}\xi^i$ $(\alpha = k + 1, \ldots, n)$, die untereinander und auf den ${}_{(\alpha)}\xi^i (\alpha = 1, \ldots, k)$ senkrecht stehen, zu einem *begleitenden n-Bein* ergänzen kann.[1])

Wie am Schluß von III, § 1 betrachten wir das in allen Punkten des $R_n$ definierte normierte $n$-Bein ${}_{(\varrho)}\mu^i$. In diesem $n$-Bein seien

$$(13) \qquad {}_{(\alpha)}\xi^i = {}_{(\alpha\varrho)}\xi\, {}_{(\varrho)}\mu^i \qquad (\alpha = 1, \ldots, k, \ \varrho, i = 1, \ldots, n)$$

die Darstellungen des begleitenden $k$-Beins von $C$; die Beinkomponenten ${}_{(\alpha\varrho)}\xi$ erhält man aus (13) durch Überschiebung mit ${}_{(\sigma)}\mu_i$

$$(13') \qquad {}_{(\alpha\sigma)}\xi = {}_{(\alpha)}\xi^i\, {}_{(\sigma)}\mu_i.$$

Aus (12) folgt wegen (III, 1, 25) und (13)

$$(14) \qquad \frac{d\,{}_{(\alpha\varrho)}\xi}{ds} + {}_{(\alpha\sigma)}\xi\, {}_{(\sigma\varrho)}C_k \frac{dx_k}{ds} = -\frac{1}{\varrho_{\alpha-1}}\, {}_{(\alpha-1,\varrho)}\xi + \frac{1}{\varrho_\alpha}\, {}_{(\alpha+1,\varrho)}\xi,$$

---

1) Man nehme einen beliebigen, auf ${}_{(\alpha)}\xi^i (\alpha = 1, \ldots, k)$ normalen, stetig differenzierbaren Einheitsvektor ${}_{(k+1)}\xi^i$ und setze von ihm ausgehend die Konstruktion des $n$-Beins fort. Für dieses gilt dann (12) mit $\varrho_0^{-1} = \varrho_k^{-1} = \varrho_n^{-1} = 0$. Die „Krümmungen" $\varrho_\alpha^{-1} (\alpha = k + 1, \ldots, n - 1)$ sind dann für die Kurve ohne Bedeutung, da sie beliebig (stetig) gewählt werden können und nur das $n - k$-Bein ${}_{(\alpha)}\xi^i (\alpha = k + 1, \ldots, n)$ längs der Kurve bestimmen.

*die Frenetformeln für die Beinkomponenten* ${}_{(\alpha\varrho)}\xi$ *des begleitenden k-Beins von C.*

Für eine Kurve $C$, deren $k$te Krümmung verschwindet, besteht nach (12) das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d x_i}{d s} = {}_{(1)}\xi^i \\ \dfrac{d\,{}_{(1)}\xi^i}{d s} = -\left\{ {p\,q \atop i} \right\} {}_{(1)}\xi^p\,{}_{(1)}\xi^q + \dfrac{{}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1} \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \dfrac{d\,{}_{(k)}\xi^i}{d s} = -\left\{ {p\,q \atop i} \right\} {}_{(k)}\xi^p\,{}_{(1)}\xi^q - \dfrac{{}_{(k-1)}\xi^i}{\varrho_{k-1}}. \end{cases}$$

Dieses System ist von der Form

$$(15')\qquad \frac{d\mu_i}{d s} = \Phi_i(s, \mu_1, \ldots, \mu_t) \qquad (i = 1, \ldots, t)$$

und sei nun für sich allein betrachtet. Da die rechten Seiten in (15) stetige Funktionen ihrer Argumente $(s, x_i, {}_{(\alpha)}\xi^i, i = 1, \ldots, n; \alpha = 1, \ldots, k)$ sind, und in bezug auf die $x_i$ und ${}_{(\alpha)}\xi^i$ stetige Ableitungen besitzen, so gibt es zu jedem System von Anfangswerten

$$(16)\qquad s_0,\quad x_i^0,\quad {}_{(\alpha)}\xi^i \qquad (i = 1, \ldots, n, \alpha = 1, \ldots, k)$$

ein eindeutig bestimmtes Lösungssystem von (15)

$$(17)\qquad x_i = \tilde{x}_i(s),\quad {}_{(\alpha)}\xi^i = {}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i(s) \qquad (i = 1, \ldots, n, \alpha = 1, \ldots, k),$$

das für $s = s_0$ die Anfangswerte (16) annimmt.

Mit $\tilde{C}$ sei die Kurve $x_i = \tilde{x}_i(s)$ bezeichnet. Die in jedem Punkt von $\tilde{C}$ definierten Invarianten

$$(18)\qquad {}_{(\alpha\beta)}T = {}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i\,{}_{(\beta)}\tilde{\xi}_i \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, k)$$

genügen dem Systeme

$$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha\beta)}T}{\mathfrak{d} s} = \frac{d\,{}_{(\alpha\beta)}T}{d s} = \left[ -\frac{{}_{(\alpha-1)}\tilde{\xi}^i}{\varrho_{\alpha-1}} + \frac{{}_{(\alpha+1)}\tilde{\xi}^i}{\varrho_\alpha} \right] {}_{(\beta)}\tilde{\xi}_i + \left[ -\frac{{}_{(\beta-1)}\tilde{\xi}_i}{\varrho_{\beta-1}} + \frac{{}_{(\beta+1)}\tilde{\xi}_i}{\varrho_\beta} \right] {}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i$$

oder

$$(19)\qquad \frac{d\,{}_{(\alpha\beta)}T}{d s} = -\frac{{}_{(\alpha-1\,\beta)}T}{\varrho_{\alpha-1}} + \frac{{}_{(\alpha+1\,\beta)}T}{\varrho_\alpha} - \frac{{}_{(\alpha\,\beta-1)}T}{\varrho_{\beta-1}} + \frac{{}_{(\alpha\,\beta+1)}T}{\varrho_\beta}.$$

Auch (19) ist ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen in der Normalform (15′), und ebenso wie bei (12) sind auch hier die Voraussetzungen für die Existenz und Eindeutigkeit eines Lösungssystems bei vorgegebenen Anfangswerten erfüllt. Da ${}_{(\alpha\beta)}T = \delta_{\alpha\beta}$ ein Lösungssystem von (19) ist, so ist es das einzige, das für einen Fixpunkt $s = s_0$ die Anfangswerte $\delta_{\alpha\beta}$ annimmt. Wählt man daher in $s_0$ die ${}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$, als normiertes $k$-Bein, so behält ${}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$ längs der ganzen Kurve $\tilde{C}$ diese Eigenschaft und ist dann wegen (15) das begleitende $k$-Bein von $\tilde{C}$, deren Bogenlänge $s$ ist. $\tilde{C}$ fällt mit $C$ zusammen, wenn in einem Punkte $(s_0)$ die Anfangslage $\tilde{x}_i^0 = x_i^0$, ${}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i = {}_{(\alpha)}\xi^i$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$ gewählt ist. Denn beide Kurven $(x_i, {}_{(\alpha)}\xi^i)$ und $(\tilde{x}_i, {}_{(\alpha)}\tilde{\xi}^i)$ erfüllen dann bei gleichen Anfangsbedingungen das System (15). Wir wiederholen, daß durch die Anfangslage des begleitenden $k$-Beins (16) und durch die Angabe von $k-1$ stetigen Funktionen $\varrho_l^{-1}$ $(l = 1, \ldots, k-1)$ der Bogenlänge eine Kurve $C$ im Riemannschen $R_n$ eindeutig gegeben ist, deren $k-1$ Krümmungen die vorgegebenen Funktionen $\varrho_l^{-1}$ sind und deren $k$te Krümmung verschwindet. Dabei muß $k \leqq n$ sein.

## § 2. Der euklidische $R_n$. Rechtwinklige kartesische Koordinaten.

Wir werden später den euklidischen $R_n$ durch geometrische Eigenschaften charakterisieren; hier gehen wir zunächst von der bekannten Tatsache aus, daß der euklidische $R_n$ am einfachsten auf rechtwinklige kartesische oder kurz rechtwinklige Koordinaten bezogen wird. Dabei wird ein Punkt $O$ zum Koordinatenursprung gewählt und durch ihn $n$ zu je zweien aufeinander senkrechte $n-1$ dimensionale Hyperebenen $E_{n-1}$ konstruiert. *Die rechtwinkligen Koordinaten $x_i$ eines Punktes $P$ sind dann die $n$ Normalabstände des Punktes $P$ von diesen $n$ Hyperebenen $E_{n-1}$.*

In rechtwinkligen Koordinaten hat der Maßtensor $g_{ik}$ die besonders einfache Gestalt

(1) $$g_{ik} = \delta_{ik} = \delta_k^i.$$

Aus $\lambda_i = g_{ik}\lambda^k = \delta_k^i \lambda^k = \lambda^i$ folgt, daß in einem auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen $R_n$ kein Unterschied zwischen kovarianten und kontravarianten Vektoren besteht. Entsprechendes gilt natürlich auch von Tensoren. Zwischen zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen $x_i$ und $\tilde{x}_i$ besteht eine Transformation der Gestalt

(2) $$\tilde{x}_i = a_{ik} x_k + b_i$$

mit konstanten $a_{ik}$, $b_i$, wobei die Matrix

(2′) $$\| a_{ik} \|$$

orthogonal ist. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet eine Gruppe, die *erweiterte Bewegungsgruppe* des $R_n$; in ihr ist die Untergruppe der Transformationen (2), (2′) enthalten, deren Matrizen die *Determinante* $|a_{ik}| = +1$ haben, und die wir *Bewegungsgruppe (im engeren Sinn)* nennen. Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, verstehen wir im folgenden unter einer *Bewegung* eine Transformation (2) mit beliebigem Vorzeichen der Determinante $|a_{ik}|$ und unter der Bewegungsgruppe schlechthin die erweiterte Bewegungsgruppe.

Wir wollen nun kurz beweisen, daß zwischen zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen in der Tat eine Transformation (2), (2′) besteht. Setzen wir $\tilde{x}_i - b_i = \bar{x}_i$, so ist die Transformation (2) das Resultat der Aufeinanderfolge der „Parallelverschiebung“

(3) $$\tilde{x}_i = \bar{x}_i + b_i$$

und der Transformation

(3′) $$\bar{x}_i = a_{ik} x_k,$$

wo $\|a_{ik}\|$ eine orthogonale Matrix ist. Die $n$ Gleichungen

(4) $$a_{ik} x_k = 0$$

stellen $n$ (für $i = 1, \ldots, n$) zu je zweien aufeinander senkrechte $E_{n-1}$ durch den Koordinatenursprung dar. Ist $P$ der betrachtete Punkt $(x_1, \ldots, x_n)$, so ist $\bar{x}_i$ der in der Richtung der Normalen ${}_{(i)}\lambda_k = a_{ik}$ der $i$ten $E_{n-1}$ gemessene Abstand des Punktes $P$ von dieser $E_{n-1}$. Um dies zu erkennen, bezeichne man mit $\bar{P}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ die Projektion von $P(x_1, \ldots, x_n)$ in diese $E_{n-1}$. Dann gilt

(5) $$a_{ij}\, \xi_j = 0$$

und

(6) $$x_j = \xi_j + p\, a_{ij},$$

wo $\pm p$ die Entfernung des Punktes $P$ von dieser $E_{n-1}$ ist, je nachdem $P$ auf der durch $a_{ij} = {}_{(i)}\lambda_j$ markierten „positiven Seite“ der $E_{n-1}$ liegt oder nicht. Überschiebt man (6) mit $a_{lj}$, so folgt wegen $a_{ij} a_{lj} = \delta_{il}$

(7) $$\bar{x}_l = a_{lj} x_j = a_{lj} \xi_j + p\, \delta_{il}.$$

Für $i = l$ gilt wegen (5)

(8) $$\bar{x}_i = p.$$

Somit sind die $\bar{x}_i$ und, wie ohne weiteres klar ist, auch die $\tilde{x}_i$ rechtwinklige Koordinaten.

Da umgekehrt $n$ im Ursprung zu je zweien senkrechte $E_{n-1}$ im rechtwinkligen Systeme $x_i$ durch Normierung der Normalvektoren $a_{ik} = {}_{(i)}\lambda_k$ in die Form (4) gebracht werden können und dann $a_{ik} x_k$ der Abstand des Punktes $x_j$ von der $i$ten dieser $E_{n-1}$ ist, so ist, wie behauptet, (2) und (2′) das allgemeinste Transformationsgesetz zwischen zwei rechtwinkligen Koordinatensystemen.

In einem auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen euklidischen $R_n$ hat der Maßtensor $g_{ik}$ die Form (1). *Umgekehrt charakterisiert diese Form des Maßtensors die rechtwinkligen Koordinaten im euklidischen $R_n$.*

Wir wollen, um dies zu zeigen, die Transformation

(9) $$\bar{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right| \neq 0$$

untersuchen, die von einem Koordinatensystem $\bar{x}_i$ mit $\bar{g}_{ik} = \delta_{ik}$ zu einem zweiten solchen $x_i$ mit $g_{ik} = \delta_{ik}$ führt. Sei $\lambda^i$ ein beliebiger kontravarianter Vektor in einem Punkte $P$ des $R_n$, so gilt, falls

$$\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \lambda^k \tag{10}$$

seine Komponenten im Systeme $\bar{x}_i$ sind,

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda^i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\bar{\lambda}^i)^2. \tag{11}$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k} = \delta_{ik}. \tag{12}$$

Wenn wir die Funktionen $\varphi_\alpha$ als zweimal stetig differenzierbar annehmen, erhalten wir aus (12)

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} = 0 \tag{13}$$

und durch Indizesvertauschung

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} = 0 \tag{13'}$$

sowie

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_k \partial x_i} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_j \partial x_i} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_k} = 0. \tag{13''}$$

Addiert man die Relationen (13) und (13′) und subtrahiert (13″), so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_k \partial x_j} \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} = 0, \tag{14}$$

woraus wegen $\left| \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} \right| \neq 0$

$$\frac{\partial^2 \varphi_\alpha}{\partial x_k \partial x_j} = 0, \tag{15}$$

also

$$\varphi_\alpha = a_{\alpha k} x_k + b_\alpha, \tag{16}$$

mit konstanten Koeffizienten $a_{\alpha k}, b_\alpha$ folgt. Es ist dann $\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x_i} = a_{\alpha i}$, und aus (12) wird

$$a_{\alpha i} a_{\alpha k} = \delta_{ik}, \tag{17}$$

d. h. die Transformation (16) die von einem Koordinatensystem $x_i$ mit $g_{ik} = \delta_{ik}$ zu einem zweiten $\bar{x}_i$ mit $\bar{g}_{ik} = \delta_{ik}$ führt, hat die Form (2), (2′) und ist also eine Bewegung. Ist das erste Koordinatensystem, was immer angenommen werden kann, rechtwinklig, so gilt dasselbe für das System $\bar{x}_i$, w. z. b. w.[1]).

1) Wir hätten den Beweis direkt geben können, wenn uns das Problem der Ebenen in einem Riemannschen $R_n$ geläufig wäre. Dieses wird aber erst an späterer Stelle behandelt.

Wird nun im euklidischen $R_n$ ein geometrisches Gebilde, z. B ein Dreieck betrachtet, so bezieht man es zweckmäßig auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, indem man im Beispiel des Dreieckes die Lage der Eckpunkte $P^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ im gewählten System durch die Koordinaten $x_i^{(\alpha)}$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ angibt. Jede geometrische Größe[1]) des Gebildes (im Dreieck: Seiten, Winkel usw.) ist dann eine Funktion der Bestimmungsstücke mit der Eigenschaft, *der Form und dem numerischen Werte nach* unverändert zu bleiben, wenn man von einem kartesischen Koordinatensystem zu irgendeinem anderen solchen übergeht. Dies bedeutet aber, daß jede geometrische Größe durch eine Invariante bezüglich *der Bewegungsgruppe* (2) *des euklidischen $R_n$* dargestellt wird. Eine fundamentale Tatsache, die meist nur ungenügend betont wird, ist diese Invarianz der Form.[2])

Wir haben damit KLEINS gruppentheoretische Auffassung skizziert, die die euklidische Geometrie als die Invariantentheorie der Bewegungsgruppe ansieht, in dem Sinn, daß jede geometrische Größe eine Invariante bezüglich der Transformationen der Bewegungsgruppe ist und umgekehrt. Die Begriffe: „Geometrische Größe“ und „Invariante bezüglich der Bewegungsgruppe“ sind nach KLEIN identisch.[3])

Wenn man statt (2) die allgemeinere Gruppe

$$\bar{x}_i = a_{ik} x_k + b_i\,, \quad |a_{ik}| \neq 0 \tag{18}$$

$(a_{ik}, b_i$ konstant) betrachtet, die die Bewegungsgruppe als Untergruppe enthält, so ist die Invariantentheorie dieser Gruppe wieder eine KLEINsche Gruppengeometrie, die sogenannte *affine Geometrie.* Jede affin geometrische Größe ist eine Invariante bezüglich der Gruppe (18), also auch bezüglich der Untergruppe (2) von (18), d. h. eine euklidische Größe. Die affine Gruppe (18) wieder ist eine Untergruppe der projektiven Gruppe

$$\bar{x}_i = \frac{a_{ik} x_k + b_i}{a_j x_i + b}\,, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & b \end{vmatrix} \neq 0, \tag{19}$$

deren Invariantentheorie die *projektive Geometrie* ist.

1) Geometrische Größe im eigentlichen Sinn des Wortes, also Zahlgröße.

2) Treibt man euklidische Geometrie in analytischer Behandlung, so legt man zumeist rechtwinklige Koordinaten zugrunde. Die geometrischen Größen, zu denen man auf Grund elementargeometrischer Methoden gelangt, haben dann die charakteristische Eigenart, durch Formeln ausgedrückt zu werden, die für alle rechtwinklige Koordinatensysteme der Form nach gleich sind. Diese auffallende Tatsache, die erst durch die RIEMANNsche Anschauungsweise erklärt wird, macht die vom speziellen Koordinatensystem unabhängige analytische Behandlung der Geometrie überhaupt erst möglich.

3) Es wird dabei keineswegs behauptet, daß sich die Geometrie im Aufstellen von

Wir wollen nun noch den Namen *Bewegung* erklären. Ist ein festes rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben, so können wir die Transformation (2) auch als *Punkttransformation* des euklidischen $R_n$ auffassen, d. h. die $x_i$ und $\tilde{x}_i$ als Koordinaten zweier Punkte in unserem festen Koordinatensystem deuten. Jedem Punkt $P(x_1, \ldots, x_n)$ wird ein Punkt (Bildpunkt) $\tilde{P}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ so zugeordnet, daß jeder Punkt $\tilde{P}$ des $R_n$ Bildpunkt eines bestimmten Punktes $P$ wird. Einem geometrischen Gebilde $G$ wird auf diese Weise ein geometrisches Gebilde $\tilde{G}$ zugeordnet. Ist nun $\varphi$ eine geometrische Größe (Länge, Winkel, Volumen oder dergleichen) des Gebildes $G$, so wird sie durch eine bestimmte Funktion der Koordinaten von $G$ und eventuell auch deren Ableitungen in der Form

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n; \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \cdots\right) \tag{20}$$

dargestellt.[1]) Dabei ist $\varphi$ eine Invariante bezüglich der Bewegungsgruppe (2), so daß

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n; \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \ldots\right) = \varphi\left(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n; \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial y_1}, \frac{\partial \tilde{x}_2}{\partial y_1}, \ldots\right) \tag{21}$$

gilt, wo

$$\tilde{x}_i = a_{ik} x_k + b_i \tag{22}$$

eine Transformation der Gruppe (2), (2′) ist. Faßt man (22), wie eben ausgeführt, als Punkttransformation auf, die dem Gebilde $G$ das Gebilde $\tilde{G}$ zuordnet, so steht rechter Hand in (21) der Ausdruck für die der geometrischen Größe $\varphi$ von $G$ entsprechende Größe $\tilde{\varphi}$ von $\tilde{G}$. Dann aber besagt (21), daß die entsprechenden geometrischen Größen der Gebilde $G$ und $\tilde{G}$ gleich sind, d. h. diese Gebilde sind *euklidisch kongruent*, wenn wir als euklidisch kongruent zwei Gebilde des euklidischen $R_n$ bezeichnen, die einander ein-eindeutig so zugeordnet werden können, daß entsprechende Größen gleiche numerische Werte haben.[2])

Durch eine Bewegung geht also jedes geometrische Gebilde des $R_n$ in ein kongruentes über.[3])

Ein System unabhängiger geometrischer Größen eines Gebildes $G$ heißt ein *vollständiges Invariantensystem*, wenn es das Gebilde bis auf seine Lage im Raum, d. h. bis auf eine Transformation der Bewegungsgruppe (also bis auf Kongruenz) festlegt. Für ein Dreieck bilden z. B. die Seitenlängen ein solches

---

Invarianten gegebener Gebilde *erschöpft*. Zu dieser sehr wichtigen Aufgabe tritt noch die, die Relationen herzustellen, die zwischen den Invarianten der gegebenen Gebilde bestehen. Ein geometrischer Satz ist ja nie etwas anderes als ein System von solchen Relationen.

1) Die analytische Form dieser Funktion ist von den Parametern $y_1, \ldots$ des Gebildes $G$ unabhängig, solange dieselben nicht speziell gewählt sind.

2) Entsprechend definiert man *affin kongruent* und *projektiv kongruent*.

3) Man überlege die Umkehrung dieser Behauptung!

System (Kongruenzsatz). Der Nachweis der Vollständigkeit für ein Invariantensystem eines Gebildes $G$ wird also ein Kongruenzsatz über dieses Gebilde sein. Jede weitere geometrische Größe wird eine Funktion der Invarianten des vollständigen Systems sein, die man oft als *natürliche Koordinaten* des betreffenden Gebildes bezeichnet.

Für euklidische Räume und allgemeiner auch für die Räume konstanter Krümmung (VI, § 5) hat die RIEMANNsche Betrachtungsweise KLEINS gruppentheoretische Auffassung der Geometrie zur Folge. Wir wollen uns das genauer überlegen. Eine geometrische Größe $\varphi$ eines geometrischen Gebildes $G$ eines RIEMANNschen $R_n$ wird durch eine Funktion

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \ldots, g_{pq}(x), \ldots\right) \tag{23}$$

der Koordinaten des Gebildes $G$ (d. h. durch die Koordinaten der Punkte von $G$) und ihrer Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung sowie des Maßtensors $g_{ik}$ und seiner Ableitungen dargestellt, die sich in bezug auf die Transformationen der Koordinaten invariant verhält, also eine Simultaninvariante des Gebildes $G$ und des Maßtensors $g_{ik}$ ist:

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \ldots, g_{pq}(x), \ldots\right) = \varphi\left(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial y_1}, \ldots, \tilde{g}_{pq}(\tilde{x}), \ldots\right). \tag{24}$$

Der euklidische $R_n$ ist nun als RIEMANNscher $R_n$ dadurch charakterisiert, daß für gewisse Koordinatensysteme (rechtwinklig kartesische) der Maßtensor $g_{ik}$ die spezielle Gestalt $g_{ik} = \delta_{ik}$ hat. Von einem rechtwinkligen System zu jedem anderen dieser Art führt eine Transformation der Gruppe (22). Beschränken wir uns auf rechtwinklige Koordinaten im euklidischen $R_n$, so wird der Ausdruck einer geometrischen Größe $\varphi$ die spezielle Gestalt

$$\psi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \ldots\right) = \varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \ldots, \delta_{pq} \ldots\right) \tag{25}$$

haben, und an Stelle von (24) tritt für eine Bewegung (22)

$$\psi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \ldots\right) = \psi\left(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial y_1}, \ldots\right). \tag{26}$$

Wir fassen nun die in (26) oder, was dasselbe ist, in

$$\varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \ldots, \delta_{pq}, \ldots\right) = \varphi\left(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial y_1}, \ldots, \delta_{pq}, \ldots\right) \tag{27}$$

eingehenden Größen als entsprechende Größen zweier kongruenter geometrischer Gebilde $G$ und $\tilde{G}$ des euklidischen Raumes auf. Beim Übergang zu allgemeinen Koordinaten $\bar{x}_i$ wird (27) zu

$$\varphi\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_1}, \ldots, \bar{g}_{pq}(\bar{x}), \ldots\right) = \varphi\left(\bar{\tilde{x}}_1, \ldots, \bar{\tilde{x}}_n, \frac{\partial \bar{\tilde{x}}_1}{\partial y_1}, \ldots, \bar{g}_{pq}(\bar{\tilde{x}}), \ldots\right); \tag{28}$$

da die linke Seite immer noch diese Größe von $G$, die rechte die entsprechende Größe von $\tilde{G}$ ausdrückt, gilt ganz allgemein zwischen entsprechenden Größen kongruenter Gebilde in euklidischen Räumen eine Relation von der Form (28).

Fassen wir $\varphi\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_1}, \ldots, \bar{g}_{pq}(\bar{x}), \ldots\right)$ als Funktion der $\bar{x}_i$ und und ihrer Ableitungen auf, sehen also von der Abhängigkeit von den im $R_n$ festgegebenen $\bar{g}_{pq}$ ab, so können wir

$$\varphi\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_1}, \ldots, \bar{g}_{pq}(\bar{x}), \ldots\right) = \chi\left(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n, \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial y_1}, \ldots\right)$$

schreiben. *In diesem Sinn erscheinen jetzt wegen* (28) *die geometrischen Größen Riemannscher Auffassung als Invarianten gegenüber den Transformationen*

(29) $$\tilde{\bar{x}}_i = \tilde{\bar{x}}_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

*der Bewegungsgruppe.*[1])

Die analytische Gestalt der Bewegungstransformationen (29) in allgemeinen Koordinaten ist natürlich nicht (2), (2′), sondern geht aus dieser speziellen, nur für rechtwinklige kartesische Koordinaten gültigen Form durch eine Transformation im Sinne der Gruppentheorie hervor. Sei nämlich

(30) $$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n), \quad x_i = x_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$$

jene Koordinatentransformation, die das rechtwinklige System $x_i$ in das allgemeine $\bar{x}_i$ überführt. Wir bezeichnen sie symbolisch mit

(31) $$\bar{x}_i = S(x_i), \quad x_i = S^{-1}(\bar{x}_i),$$

und ebenso bedeute

(32) $$\overline{U}_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} = S(U_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}), \quad U_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot} = S^{-1}(\overline{U}_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot})$$

die Transformation eines Tensors $U_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}$ beim Übergang (31) vom System $x_i$ zum System $\bar{x}_i$. So ist z. B.

(33) $$\bar{g}_{ik}(\bar{x}) = S\left(g_{ik}(x)\right),$$

die symbolische Schreibweise für die Gleichungen

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n), \quad \bar{g}_{ik} = g_{pq}\frac{\partial x_p}{\partial \bar{x}_i}\frac{\partial x_q}{\partial \bar{x}_k}.$$

Zwei kongruente Gebilde $G$ und $\tilde{G}$ sind im System $x_i$ durch eine Relation

(34) $$\tilde{G} = T(G)$$

verbunden, wobei $T$ eine Bewegung (2) ist. Im System $\bar{x}_i$ sei das Gebilde $G$ mit $\overline{G}$ und $\tilde{G}$ mit $\tilde{\overline{G}}$ bezeichnet. Dann gilt symbolisch

(35) $$\overline{G} = S(G) \quad \text{und} \quad \tilde{\overline{G}} = S(\tilde{G}).$$

---

1) Beschränkt man sich auf rechtwinklige Koordinaten, so folgt dies bereits aus (26).

Aus (34) und (35) folgt $\tilde{\bar{G}} = S(T(G))$, und da $G = S^{-1}(\bar{G})$ ist, verknüpft die Transformation

$$\tilde{\bar{G}} = STS^{-1}(\bar{G}) = \bar{T}(\bar{G}) \tag{36}$$

$\tilde{\bar{G}}$ mit $\bar{G}$. Nimmt man für $G$ einen Punkt des $R_n$, so sieht man, daß *die Bewegungstransformationen $\bar{T}$ des euklidischen Raumes im System $\bar{x}_i = S(x_i)$ aus den mit $T$ bezeichneten Bewegungstransformationen* (2) *durch Transformation mit $S$ hervorgehen, d. h. es ist*

$$\bar{T} = STS^{-1}.$$

Wir definieren nun den Begriff „Bewegungsgruppe" für den allgemeinen Riemannschen $R_n$. Gibt es in einem Riemannschen $R_n$ Punkttransformationen $\tilde{x}_i = T(x_i)$, die geometrische Gebilde im Sinn von (28) „kongruent verpflanzen", dann bilden sie, wie man sich ohne weiteres überlegt, in ihrer Gesamtheit eine Gruppe, die wir die *Bewegungsgruppe des betrachteten Riemannschen $R_n$* nennen wollen.

Aus (28) entnimmt man wieder, daß jede geometrische Größe sich als Invariante der Bewegungsgruppe ansehen läßt.

Ist nun

$$\tilde{x}_i = T(x_i) \tag{37}$$

eine Punkttransformation, so gilt, wenn wir sie für den Augenblick als Koordinatentransformation deuten,

$$\tilde{g}_{ik}(\tilde{x}) = T(g_{ik}(x)) \tag{38}$$

und nach der Definition der geometrischen Größen als Invarianten gegenüber Koordinatentransformationen

$$\varphi\left(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n, \frac{\partial \tilde{x}_1}{\partial y_1}, \ldots, \tilde{g}_{pq}(\tilde{x}), \ldots\right) = \varphi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \ldots, g_{pq}(x), \ldots\right). \tag{39}$$

Genügt nun die Transformation (37) der Relation

$$T(g_{ik}(x)) = g_{ik}(\tilde{x}), \tag{40}$$

so geht (39) über in (28), d. h. *die Punkttransformation $T$* (37) *ist eine Bewegung.*

Wir zeigen noch, daß (40) für Bewegungen auch *notwendig und damit charakteristisch* ist. Zum Beweise betrachten wir das innere Produkt zweier willkürlicher Vektoren $\lambda^i$ und $\mu^i$ eines Punktes. Ist dann (37) eine Bewegung und setzen wir

$$T(g_{ik}(x)) = \tilde{g}_{ik}(\tilde{x}), \quad T(\lambda^i(x)) = \tilde{\lambda}^i(\tilde{x}), \quad T(\mu^i(x)) = \tilde{\mu}^i(\tilde{x}),$$

so ist nach den allgemeinen Regeln der Tensorrechnung

$$g_{ik}(x)\lambda^i(x)\mu^k(x) = \tilde{g}_{ik}(\tilde{x})\tilde{\lambda}^i(\tilde{x})\tilde{\mu}^i(\tilde{x}); \tag{41}$$

aber da es sich um eine Kongruenz handelt, gilt auch

$$(42)\qquad g_{ik}(x)\lambda^i(x)\mu^k(x) = g_{ik}(\tilde{x})\tilde{\lambda}^i(\tilde{x})\tilde{\mu}^i(\tilde{x}).$$

Wegen der Willkür der Vektoren $\tilde{\lambda}^i$ und $\tilde{\mu}^i$ folgt aus (41) und (42)

$$(43)\qquad \tilde{g}_{ik}(\tilde{x}) = T(g_{ik}(x)) = g_{ik}(\tilde{x}),$$

w. z. b. w.

Zum Schluß sei noch erwähnt, daß Punkttransformationen tensorerhaltend sind, d. h. ist in einem Punkt $x_i$ ein Tensor

$$(44)\qquad x_i,\quad U^{\cdot}_{\cdot\cdot}$$

definiert, so führt ihn *jede* Punkttransformation $\tilde{x}_i = V(x_i)$ — wobei sich die analytische Gestalt von $V$ mit dem Koordinatensystem ändert — in einen Tensor gleicher Art

$$(45)\qquad \tilde{x}_i,\quad \tilde{U}^{\cdot\cdot}_{\cdot} = V(U^{\cdot}_{\cdot\cdot})$$

über. Ist nämlich $\bar{x}_i = S(\bar{x}_i)$ eine Koordinatentransformation, so hat im neuen System $\bar{x}_i$ die Punkttransformation $V$ die analytische Gestalt

$$\bar{V} = SVS^{-1}.$$

Nun sind aber die Komponenten $\bar{U}^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ des Tensors (44) im System $\bar{x}_i$ symbolisch dargestellt durch

$$(46)\qquad \bar{U}^{\cdot\cdot}_{\cdot} = S(U^{\cdot}_{\cdot\cdot}).$$

Es gilt demnach

$$(47)\qquad \tilde{\bar{U}}^{\cdot\cdot}_{\cdot} = \bar{V}(\bar{U}^{\cdot\cdot}_{\cdot}) = \bar{V}S(U^{\cdot}_{\cdot\cdot}) = SV(U^{\cdot}_{\cdot\cdot}) = S(\tilde{U}^{\cdot\cdot}_{\cdot}),$$

womit der Tensorcharakter von $\tilde{U}^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ nachgewiesen ist.

## § 3. Kurven im euklidischen $R_n$.

Wenn wir im euklidischen $R_n$ rechtwinklige Koordinaten verwenden, so sind die $g_{ik} = \delta_{ik}$ konstant und es verschwinden alle Christoffelklammern. Somit ist

$$(1)\qquad \frac{\mathfrak{d}\,T^{\cdot\cdot}_{\cdot}}{\mathfrak{d}\,x_j} = \frac{d\,T^{\cdot\cdot}_{\cdot}}{d\,x_j}$$

für jeden Tensor $T^{\cdot}_{\cdot}$. Wegen

$$(2)\qquad \lambda_i = g_{ik}\lambda^k = \delta_{ik}\lambda^k = \lambda^i$$

fällt jede Unterscheidung von kovarianten und kontravarianten Indizes bei Tensoren fort. Die Bewegung

$$(3)\qquad \bar{x}_i = a_{ik}x_k + b_i,$$

mit orthogonaler Matrix $\|a_{ik}\|$ und konstanten Koeffizienten $a_{ik}$ und $b_i$ ist dann eine Punkttransformation, bei der die geometrischen Größen der bewegten Gebilde erhalten bleiben.

In § 1 wurde gezeigt, daß eine Kurve $C$

$$x_i = x_i(s), \tag{4}$$

die wir auf die Bogenlänge als Parameter beziehen, durch die Anfangslage des begleitenden $n$-Beins[1])

$$x_i^0, \quad {}_{(\alpha)}\xi_i^0; \quad {}_{(\alpha)}\xi_i^0\, {}_{(\beta)}\xi_i^0 = \delta_{\alpha\beta} \tag{5}$$

und durch die Angabe der Krümmungen

$$\frac{1}{\varrho_\alpha} = \varphi_\alpha(s), \tag{6}$$

wo die $\varphi_\alpha(s)$ stetige Funktionen der Bogenlänge sind, vollständig bestimmt ist. Ist nun

$$\bar{x}_i^0, \quad {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0 \tag{7}$$

ein zweites normiertes $n$-Bein (${}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0\, {}_{(\beta)}\bar{\xi}_i^0 = \delta_{\alpha\beta}$), so existiert genau eine Bewegung (3), welche die zwei $n$-Beine (5) und (7) ineinander überführt. Aus

$$\bar{x}_i^0 = a_{ik} x_k^0 + b_i \tag{8}$$

und

$$ {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0 = a_{ik}\, {}_{(\alpha)}\xi_k^i \tag{8'}$$

folgt nämlich, wenn (8') mit ${}_{(\alpha)}\xi_j^0$ multipliziert wird,

$$a_{ij} = {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0\, {}_{(\alpha)}\xi_j^0, \tag{9}$$

worauf dann die $b_i$ aus (8) zu berechnen sind. Die Matrix der $a_{ij}$ (9) ist wegen

$$a_{ij} a_{kj} = {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0\, {}_{(\beta)}\bar{\xi}_k^0\, {}_{(\alpha)}\xi_j^0\, {}_{(\beta)}\xi_j^0 = {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_i^0\, {}_{(\alpha)}\bar{\xi}_k^0 = \delta_{ik} \tag{10}$$

orthogonal.

Die so bestimmte Bewegung (3) transformiert die Kurve $C$ in eine Kurve $\bar{C}$, deren begleitendes $n$-Bein die Anfangslage (7) hat und die in entsprechenden Punkten $s$ die gleichen Krümmungen $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ wie die Kurve $C$ hat. Da aber durch diese Eigenschaft eine Kurve bestimmt wird, so folgt daraus, daß *alle Kurven mit gleichen Krümmungen euklidisch kongruent sind,* d. h. durch Bewegungen ineinander übergeführt werden können.

Diese Tatsache folgt auch direkt aus den Frenetschen Formeln. In rechtwinkligen Koordinaten lauten diese

1) Wir denken uns im Fall $\varrho_k^{-1} = 0$ $(k < n)$ das begleitende $k$-Bein in der in § 1 angegebenen Weise zu einem begleitenden $n$-Bein ergänzt.

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{ds} = {}_{(1)}\xi_i \\[2mm] \dfrac{d\,{}_{(\alpha)}\xi_i}{ds} = -\dfrac{{}_{(\alpha-1)}\xi_i}{\varrho_{\alpha-1}} + \dfrac{{}_{(\alpha+1)}\xi_i}{\varrho_\alpha}, \quad \dfrac{1}{\varrho_0} = \dfrac{1}{\varrho_n} = 0. \end{cases}$$

Wenn es zu einer Kurve $x_i = x_i(s)$ ein System von $n$ Einheitsvektoren gibt, das den Gleichungen (11) genügt, so ist $s$ die Bogenlänge dieser Kurve und die $n$ Einheitsvektoren sind ihr begleitendes $n$-Bein. In der Tat folgt aus

$$(12)\qquad \frac{dx_i}{ds} = {}_{(1)}\xi_i$$

und ${}_{(1)}\xi_i\,{}_{(1)}\xi_i = 1$, daß ${}_{(1)}\xi_i$ die Kurventangente und $s$ die Bogenlänge von $C$ ist. Aus

$$(13)\qquad \frac{d\,{}_{(1)}\xi_i}{ds} = \frac{{}_{(2)}\xi_i}{\varrho_1}$$

und ${}_{(2)}\xi_i\,{}_{(2)}\xi_i = 1$ folgt weiter, daß ${}_{(2)}\xi_i$ die erste Normale und $\frac{1}{\varrho_1}$ die erste Krümmung von $C$ ist, womit auch die Orthogonalität der Vektoren ${}_{(1)}\xi_i$ und ${}_{(2)}\xi_i$ gezeigt ist. Aus

$$(14)\qquad \frac{d\,{}_{(2)}\xi_i}{ds} = -\frac{{}_{(1)}\xi_i}{\varrho_1} + \frac{{}_{(3)}\xi_i}{\varrho_2}$$

und ${}_{(3)}\xi_i\,{}_{(3)}\xi_i = 1$ folgt dann weiter, daß ${}_{(3)}\xi_i$ die zweite Normale und $\frac{1}{\varrho_2}$ die zweite Krümmung von $C$ ist usw.

Durch die Transformation (3) wird die Kurve $C$ in die neue Lage $\overline{C}$ bewegt. Setzen wir

$$(15)\qquad {}_{(\alpha)}\overline{\xi}_i = a_{ik}\,{}_{(\alpha)}\xi_k,$$

so folgt durch Überschiebung der Gleichungen des Systems (11) mit $a_{ij}$

$$(16)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\overline{x}_i}{ds} = {}_{(1)}\overline{\xi}_i \\[2mm] \dfrac{d\,{}_{(\alpha)}\overline{\xi}_i}{ds} = -\dfrac{{}_{(\alpha-1)}\overline{\xi}_i}{\varrho_{\alpha-1}} + \dfrac{{}_{(\alpha+1)}\overline{\xi}_i}{\varrho_\alpha}, \quad \dfrac{1}{\varrho_0} = \dfrac{1}{\varrho_n} = 0. \end{cases}$$

Nun gilt ${}_{(\alpha)}\overline{\xi}_i\,{}_{(\alpha)}\overline{\xi}_i = 1$ (über $\alpha$ nicht summiert), d. h. die in (16) auftretenden Vektoren ${}_{(\alpha)}\overline{\xi}_i$ sind Einheitsvektoren und bilden also das begleitende $n$-Bein der Kurve $\overline{C}$, deren Krümmungen $\frac{1}{\varrho_\alpha}$ somit gleich den Krümmungen der Kurve $C$ sind. Da wir nun die Bewegung (3) immer so bestimmen können, daß die Anfangslage ($s = 0$) des begleitenden $n$-Beins von $\overline{C}$ irgendein vorgegebenes normiertes $n$-Bein ist, so haben wir wieder das Resultat, daß alle Kurven mit gleichen Krümmungen (in entsprechenden, durch gleiche Werte der Bogenlänge gegebenen Punkten) *kongruent* sind, d. h. durch Bewegungen (3) ineinander übergeführt werden können.

Die Bogenlänge und die Krümmungen (als Funktionen der Bogenlänge) sind ein vollständiges Invariantensystem der Kurve; man spricht auch oft von den „natürlichen Koordinaten", wenn man diesen Sachverhalt kurz bezeichnen will.

Wir geben zum Schluß noch einige Folgerungen aus den FRENETschen Formeln. Betrachten wir eine Kurve $C$, bei der $\frac{1}{\varrho_t} \neq 0$ für $t = 1, \ldots, r-1$, dagegen $\frac{1}{\varrho_r} = 0$ ist. Diese Kurve $x_i = x_i(s)$ sei $r+1$mal stetig differenzierbar.[1]) Dann gilt für $k \leqq r$

$$(17) \qquad {}_{(k)}\xi_i = \sum_{l=1}^{k} {}_{(k)}A_{(l)} \frac{d^l x_i}{d s^l},$$

mit skalaren, $r-k+1$mal stetig differenzierbaren ${}_{(k)}A_{(l)}$, wobei

$$(17') \qquad {}_{(k)}A_{(k)} = \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{k-1}, \quad {}_{(1)}A_{(1)} = 1$$

ist. Die Darstellung gilt sicher für $k=1$. Sie sei nun bis $k \leqq h < r$ bewiesen. Dann gilt

$$(18) \qquad {}_{(h+1)}\xi_i = \varrho_h \left( \frac{{}_{(h-1)}\xi_i}{\varrho_{h-1}} + \frac{d_{(h)}\xi_i}{ds} \right) = \sum_{l=1}^{h+1} {}_{(h+1)}A_{(l)} \frac{d^l x_i}{d s^l}$$

mit $r-h$mal stetig differenzierbaren ${}_{(h+1)}A_{(l)}$ und mit

$$(18') \qquad {}_{(h+1)}A_{(h+1)} = \varrho_h \, {}_{(h)}A_{(h)} = \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_h .$$

Ist die Formel (17) für ein $k < r$ richtig, so gilt sie also auch für $k+1$ und ist also, da sie für $k=1$ gilt, für alle $k \leqq r$ bewiesen. Aus $\frac{1}{\varrho_r} = 0$ und

$$(19) \qquad \frac{d_{(r)}\xi_i}{ds} = \frac{{}_{(r-1)}\xi_i}{\varrho_{r-1}}$$

folgt dann

$$(20) \qquad \frac{d}{ds}\left[ \sum_{l=1}^{r} {}_{(r)}A_{(l)} \frac{d^l x_i}{d s^l} \right] = \sum_{l=1}^{r-1} \frac{{}_{(r-1)}A_{(l)}}{\varrho_{r-1}} \frac{d^l x_i}{d s^l} .$$

Da ${}_{(r)}A_{(r)} = \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{r-1}$ endlich und von Null verschieden ist, kann man nach (20) die $\frac{d^{r+1} x_i}{d s^{r+1}}$ linear durch die $\frac{d^\alpha x_i}{d s^\alpha}$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ ausdrücken. Ist also $\frac{1}{\varrho_t} \neq 0$ für $t < r$, und $\frac{1}{\varrho_r} = 0$, so ist der Rang der Matrix

$$(21) \qquad \left\| \frac{d x_i}{ds} \; \frac{d^2 x_i}{d s^2} \ldots \frac{d^r x_i}{d s^r} \; \frac{d^{r+1} x_i}{d s^{r+1}} \right\|$$

---

1) Wie man aus (11) durch Rekursion schließt, sind dann die ${}_{(\alpha+1)}\xi_i$ und $\varrho_\alpha$ gerade $r-\alpha$mal stetig differenzierbar.

jedenfalls kleiner als $r+1$. Den für $k \leqq r$ definierten normierten PLÜCKERschen Tensor

$$(22)\qquad {}_{(k)}\pi_{ij\ldots l} = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi_i & {}_{(1)}\xi_j & \cdots & {}_{(1)}\xi_l \\ {}_{(2)}\xi_i & {}_{(2)}\xi_j & \cdots & {}_{(2)}\xi_l \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ {}_{(k)}\xi_i & {}_{(k)}\xi_j & \cdots & {}_{(k)}\xi_l \end{vmatrix}$$

kann man nach (17) schreiben

$$(23)\qquad {}_{(k)}\pi_{ij\ldots l} = \begin{vmatrix} \frac{dx_i}{ds} & \frac{dx_j}{ds} & \cdots & \frac{dx_l}{ds} \\ \frac{d^2x_i}{ds^2} & \frac{d^2x_j}{ds^2} & \cdots & \frac{d^2x_l}{ds^2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{d^kx_i}{ds^k} & \frac{d^kx_j}{ds^k} & \cdots & \frac{d^kx_l}{ds^k} \end{vmatrix} \varrho_1^{k-1}\varrho_2^{k-2}\cdots\varrho_{k-2}^2\varrho_{k-1}.$$

Nun gilt

$$(24)\qquad \begin{Vmatrix} {}_{(1)}\xi_1 & {}_{(1)}\xi_2 & \cdots & {}_{(1)}\xi_n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ {}_{(k)}\xi_1 & {}_{(k)}\xi_2 & \cdots & {}_{(k)}\xi_n \end{Vmatrix}^2 = 1,$$

andrerseits ist dieses Matrizenquadrat gleich

$$(24')\qquad \sum_{(ij\ldots l)} ({}_{(k)}\pi_{ij\ldots l})^2,$$

woraus dann

$$(25)\qquad \frac{1}{(\varrho_1^{k-1}\varrho_2^{k-2}\cdots\varrho_{k-1})^2} = \frac{\sum\limits_{(ij\ldots l)} \begin{vmatrix} dx_i & dx_j & \ldots & dx_l \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ d^kx_i & d^kx_j & \ldots & d^kx_l \end{vmatrix}^2}{ds^{k(k+1)}}$$

folgt. In (25) wird rechts über alle Kombinationen $i, j, \ldots, l$ der $n$ Elemente $1, 2, \ldots, n$ zu je $k$ summiert. Die Relation (25), die für den Bogenparameter $s$ hergeleitet wurde, gilt, wie man sich leicht überzeugt, für jeden Parameter der Kurve, und sie gilt nicht nur für $k = 1, \ldots, r$, sondern auch für $k = r+1$, da ja dann beide Seiten in (25) verschwinden.

Die beiden Matrizen

$$(26)\qquad \begin{Vmatrix} dx_1 & \ldots & dx_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ d^rx_1 & \ldots & d^rx_n \\ d^{r+1}x_1 & \ldots & d^{r+1}x_n \end{Vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{Vmatrix} dx_1 & \ldots & dx_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ d^rx_1 & \ldots & d^rx_n \end{Vmatrix}$$

haben somit den Rang $r$. Wir nehmen nun an, es sei (nach eventueller Umnumerierung der Koordinaten)

$$\begin{vmatrix} dx_1 & \ldots & dx_r \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ d^r x_1 & \ldots & d^r x_r \end{vmatrix} \neq 0, \tag{27}$$

und betrachten die lineare homogene Differentialgleichung $r + 1$ter Ordnung für die Funktion $\varphi(t)$ ($t$ ist der Kurvenparameter):

$$\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & \ldots & x_r' & \varphi' \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ x_1^{(r)} & x_2^{(r)} & \ldots & x_r^{(r)} & \varphi^{(r)} \\ x_1^{(r+1)} & x_2^{(r+1)} & \ldots & x_r^{(r+1)} & \varphi^{(r+1)} \end{vmatrix} = 0, \tag{28}$$

in der der Koeffizient von $\varphi^{(r+1)} = \frac{d^{r+1}\varphi}{dt^{r+1}}$ sicher nicht Null ist. Sie hat genau $r + 1$ linear unabhängige Lösungen, durch die dann jede weitere mit konstanten Koeffizienten linear darstellbar ist. Ein solches Lösungssystem ist

$$1, x_1, x_2, \ldots, x_r; \tag{29}$$

da ferner die erste der Matrizen (26) den Rang $r$ hat, ist jedes $x_i$ ($i = 1, \ldots, n$), eine Lösung von (28). Also gilt die Darstellung

$$x_i = c_{i0} + c_{i1} x_1 + \cdots + c_{ir} x_r \tag{30}$$

mit konstanten $c_{ir}$. *Ist also* $\frac{1}{\varrho_r}$ *die erste verschwindende Krümmung, so liegt die Kurve* $C$ *in einer* $r$ *dimensionalen Hyperebene* $E_r$ (30) und in keiner Hyperebene niederer Dimension, da ja die Größen der Reihe (29) linear unabhängig sind.

Bemerkt sei, daß die Formel (17), wenn man sie in der zweckmäßigeren Gestalt

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{k-1}} \, {}_{(k)}\xi_i = \frac{d^k x_i}{ds^k} + \sum_{h<k} X_h \frac{d^h x_i}{ds^h} \tag{31}$$

schreibt, wegen der Stetigkeit aller auftretenden Größen auch in den Punkten gilt, in welchen $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{k-1}}$ verschwindet.

Man sieht dies auch direkt so ein: Ist $\frac{1}{\varrho_h} = 0$, $h < k$ im Punkt $P$ von $C$, dagegen alle vorangehenden Krümmungen $\neq 0$, so folgt aus

$$\frac{1}{\varrho_1 \cdots \varrho_{h-1}} \, {}_{(h)}\xi_i = \frac{d^h x_i}{ds^h} + \sum_{j<h} \bar{X}_j \frac{d^j x_i}{ds^j}$$

durch Differentiation nach $s$ in $P$

$$\frac{-1}{\varrho_1 \cdots \varrho_{h-1}} \, \frac{{}_{(h-1)}\xi_i}{\varrho_{h-1}} = \frac{d^{h+1} x_i}{ds^{h+1}} + \sum_{j<h+1} \bar{\bar{X}}_j \frac{d^j x_i}{ds^j};$$

also, da die linke Seite selbst die Form $\sum_{j<h-1} Y_j \frac{d^j x_i}{d s^j}$ hat,

$$0 = \frac{d^{h+1} x_i}{d s^{h+1}} + \sum_{j<h+1} Z_j \frac{d^j x_i}{d s^j}.$$

Ist demnach $\frac{1}{\varrho_h}$ die erste verschwindende Krümmung in einem Punkte $P$ von $C$, so ist in diesem Punkte $\frac{d^{h+1} x_i}{d s^{h+1}}$ durch die Ableitungen niederer Ordnung linear ausdrückbar, also auch $\frac{d^{h+2} x_i}{d s^{h+2}}$ usw.

Man beachte, daß aus (31) die Identität der Vektorräume $\{{}_{(1)}\xi_i, \ldots, {}_{(k)}\xi_i\}$ und $\left\{\frac{d x_i}{ds}, \ldots, \frac{d^k x_i}{ds^k}\right\}$ folgt.

# V. Variationsrechnung.

## § 1. Der $n$ dimensionale Punktraum der Variationsrechnung.

Im $n$ dimensionalen Punktraum, wie wir ihn in I, § 1 einführten, sei eine Funktion des kontravarianten Vektors $x_i, \lambda^i$

$$F(x_1, \ldots, x_n; \lambda^1, \ldots, \lambda^n) \tag{1}$$

gegeben, die wir kurz mit $F(x, \lambda)$ bezeichnen. Von einer solchen Funktion sagen wir, daß sie *in $\lambda$ von $k$ter Ordnung positiv homogen* ist, wenn

$$F(x_1, \ldots, x_n; c\lambda^1, \ldots, c\lambda^n) = c^k F(x_1, \ldots, x_n; \lambda^1, \ldots, \lambda^n) \tag{2}$$

oder kurz

$$\boldsymbol{F(x, c\lambda) = c^k F(x, \lambda)}$$

fur jedes positive $c$ gilt. Setzen wir $F = [g_{ij}(x_1, \ldots, x_n)\lambda^i\lambda^j]^{\frac{k}{2}}$, so haben wir den Riemannschen $R_n$ als Beispiel eines solchen Raumes. *Alle folgenden Überlegungen gelten demnach auch für die Räume der Differentialgeometrie.*

Wir erinnern an die Annahme in I, § 1, daß das Bild unseres $R_n$ im Zahlraume $x_1, \ldots, x_n$ eine abgeschlossene topologische Kugel, d. h. das eineindeutige und stetige Bild einer Punktmenge $y_1^2 + \cdots + y_n^2 \leqq a^2$ ist.

Wir setzen die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$ zunächst nur als stetige Funktion der $2n$ Argumente $x_1, \ldots, x_n; \lambda^1, \ldots, \lambda^n$ voraus. In der Koordinatentransformationen

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n), \tag{3}$$

müssen dann die Funktionen $\bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$ stetig differenzierbar sein ($m \geqq 1$), denn nur dann überträgt sich bei einem Koordinatenwechsel der Begriff der Stetigkeit der Funktion $F(x, \lambda)$. Mit

$$\text{Max.}\, \lambda$$

bezeichnen wir den größten der $n$ absoluten Beträge $|\lambda^1|, |\lambda^2|, \ldots, |\lambda^n|$ der Komponenten des kontravarianten Vektors $x_i, \lambda^i$. Die Relation Max. $\lambda = 1$ definiert dann in der $2n$ dimensionalen Mannigfaltigkeit $x_i, \lambda^i$ eine beschränkte abgeschlossene Menge, in der die stetige Funktion $F(x, \lambda)$ ein endliches Maximum $A$ und ein endliches Minimum $B$ hat.

Wir wollen jetzt $F(x, \lambda)$ als positiv homogen von erster Ordnung ($k = 1$) voraussetzen, wobei noch (in diesem Paragraphen) für negative $c$ die Relation $F(x, c\lambda) = -cF(x, \lambda)$ gelte, also allgemein

$$F(x, c\lambda) = |c| F(x, \lambda) \tag{2'}$$

für beliebige reelle $c$ sei. Dann folgt aus (2), daß $F(x, \lambda)$ für Nullvektoren $\lambda^i = 0$ verschwindet. Soll aber, wie wir nun weiter annehmen wollen,

$$F(x, \lambda) \geqq 0 \tag{4}$$

sein und gleich Null *nur* für Nullvektoren, so muß das oben definierte Minimum $B > 0$ sein. Trifft die Annahme (4) zu, so nennen wir das sofort zu besprechende Variationsproblem *positiv definit*. Infolge unserer Voraussetzungen gilt

$$A \geqq F(x, \lambda) \geqq B > 0 \tag{5}$$

für Max. $\lambda = 1$. Daraus folgt für positives $c$

$$Ac \geqq F(x, \lambda) \geqq Bc > 0 \tag{6}$$

für Max. $\lambda = c$, also

$$A \operatorname{Max.} \lambda \geqq F(x, \lambda) \geqq B \operatorname{Max.} \lambda > 0 \tag{7}$$

für den beliebigen Vektor $x_i, \lambda^i$. Neben (7) und mit (7) äquivalent gilt

$$\frac{F(x, \lambda)}{B} \geqq \operatorname{Max.} \lambda \geqq \frac{F(x, \lambda)}{A}. \tag{7'}$$

Auf jedem stetig differenzierbaren, im Sinn wachsender Parameter gerichteten Kurvenbogen

$$x_i = x_i(t) \tag{8}$$

können wir durch das Integral

$$s = \int^{t} F(x, x')\, dt \tag{9}$$

einen bis auf eine additive Konstante bestimmten Parameter $s$, die *Bogenlänge*, einführen, die von dem Ausgangsparameter $t$ der Kurve nicht abhängt, wenn $F(x, \lambda)$ von erster Ordnung positiv homogen ist. Für die Bogenlänge als Parameter ist

$$F(x, x') = 1 \tag{9'}$$

charakteristisch.

Das Integral ($t_0 < t_1$)

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, x')\, dt \tag{10}$$

nennt man den auf der Kurve (8) gemessenen *Bogen* zwischen $P_0(t = t_0)$ und

$P_1(t = t_1)$. Sind $P$ und $Q$ dann irgend zwei Punkte des $R_n$, so definiert man als ihren *Abstand*

$$\overline{PQ} = \overline{QP} \tag{11}$$

*die untere Grenze* aller Bogen von $P$ nach $Q$ (bzw. von $Q$ nach $P$), d. h. die untere Grenze aller Integralwerte

$$\int_P^Q F(x, x')\,dt \quad \text{oder} \int_Q^P F(x, x')\,dt \tag{12}$$

fur alle $P$ mit $Q$ (oder $Q$ mit $P$) verbindenden stetig differenzierbaren Kurvenstücke.

Der so definierte Abstand erfullt die sogenannten *Abstandsaxiome*. In der Tat ist erstens

$$\overline{P_0 P_1} \geqq 0 \tag{13}$$

für irgend zwei Punkte des $R_n$, und zweitens folgt aus $\overline{P_0 P_1} = 0$

$$P_0 \equiv P_1. \tag{14}$$

Definitionsgemäß ist ja $\overline{P_0 P_1}$ die untere Grenze der Integrale (12); andrerseits ist

$$\int_{t_0}^{t_1} F(x, x')\,dt \geqq B \int_{t_0}^{t_1} \text{Max.}\, x'\,dt \geqq B \int_{t_0}^{t_1} |x_i'|\,dt \geqq B \left| \int_{t_0}^{t_1} x_i'\,dt \right| = B\,|x_i(t_1) - x_i(t_0)|,$$

also gilt

$$\overline{P_0 P_1} \geqq B\,\text{Max.}\,\varDelta, \quad \varDelta_i = x_i(t_1) - x_i(t_0), \tag{15}$$

wo Max. $\varDelta$ den größten der $n$ absoluten Beträge $|\varDelta_1|, \ldots, |\varDelta_n|$ bedeutet. Aus (15) aber folgt Max. $\varDelta = 0$ für $\overline{P_0 P_1} = 0$, d. h. $P_0 \equiv P_1$, w. z. b. w.

Das sogenannte dritte Abstandsaxiom

$$\overline{PQ} + \overline{QR} \geqq \overline{PR} \tag{16}$$

für irgendwelche drei Punkte $P, Q, R$ des $R_n$ ist ebenso wie das erste (13) eine unmittelbare Folge unserer Definition des Abstandes zweier Punkte.

Halten wir den Punkt $P_0$ fest, *so ist der Abstand $\overline{P_0 P}$ eine stetige Funktion der Koordinaten des Punktes $P$*. Für jeden $P$ mit einem dritten Punkte $P_1$ verbindenden Bögen gilt nämlich

$$\overline{P P_1} \leqq \int_t^{t_1} F(x, x')\,dt. \tag{17}$$

Wir betrachten den $P$ mit $P_1$ verbindenden Kurvenbogen

$$x_i = x_i(P) + t[x_i(P_1) - x_i(P)] = x_i(P) + t\varDelta_i. \tag{18}$$

Für ihn ist $x_i' = \Delta_i$, also

$$\overline{PP_1} \leqq \int_0^1 F(x, \Delta)\, dt \leqq A \operatorname{Max.} \Delta. \tag{19}$$

Aus (19) und

$$\left| \overline{P_0 P} - \overline{P_0 P_1} \right| \leqq \overline{PP_1} \tag{20}$$

folgt die Behauptung.

Ist $\mathfrak{M}$ eine Punktmenge des $R_n$ und $P_0$ irgendeiner seiner Punkte, so definieren wir als Abstand

$$\overline{P_0 \mathfrak{M}} = \overline{\mathfrak{M} P_0}$$

der Punktmenge $\mathfrak{M}$ und des Punktes $P_0$ die untere Grenze der Abstände $\overline{P_0 M}$ aller Punkte $M$ der Menge $\mathfrak{M}$ von $P_0$. *Halten wir die Menge $\mathfrak{M}$ fest, so ist $\overline{\mathfrak{M} P}$ eine stetige Funktion der Koordinaten des Punktes $P$.* Ist $P_1$ irgendein Punkt des $R_n$ und $M$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$, so gilt

$$\overline{MP} \leqq \overline{MP_1} + \overline{PP_1}, \tag{21}$$

also für die unteren Grenzen

$$\overline{\mathfrak{M}P} \leqq \overline{\mathfrak{M}P_1} + \overline{PP_1}. \tag{22}$$

Ebenso zeigt man

$$\overline{\mathfrak{M}P_1} \leqq \overline{\mathfrak{M}P} + \overline{PP_1}. \tag{22'}$$

Aus (19), (22) und (22′) folgt die Behauptung.

Die Menge der Punkte $P$, für die $\overline{\mathfrak{M}P} < \varrho$ ist, heißt die *$\varrho$-Umgebung der Punktmenge* $\mathfrak{M}$. Wir bezeichnen sie mit

$$\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}). \tag{23}$$

*Sie ist eine offene Punktmenge* (im Zahlraum $x_1, \ldots, x_n$). Wir zeigen dies durch den Nachweis, daß die Komplementärmenge $C(\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}))$ von $\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M})$ abgeschlossen ist. Ist $P$ der Grenzpunkt der konvergenten Folge $P_1, P_2, P_3, \ldots$ aus $C(\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}))$, so folgt aus

$$\lim \overline{\mathfrak{M}P_\nu} = \overline{\mathfrak{M}P}, \tag{24}$$

da $\overline{\mathfrak{M}P_\nu} \geqq \varrho$, daß $\overline{\mathfrak{M}P} \geqq \varrho$ ist, d. h. $P$ ist ein Punkt von $C(\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}))$.

*Unter einer Umgebung einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ verstehen wir irgendeine offene, $\mathfrak{M}$ enthaltende Punktmenge $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$.* Offen und abgeschlossen ist dabei wie oben in bezug auf den Zahlraum $x_1, \ldots, x_n$ definiert, wobei zu beachten ist, daß diese Mengeneigenschaften durch ein-eindeutige stetige Transformationen der Koordinaten nicht zerstört werden.

*In jeder Umgebung* $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ *der abgeschlossenen Menge* $\mathfrak{M}$ *gibt es eine* $\varrho$*-Umgebung* $\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$, was wir kurz $\mathfrak{U}_\varrho(\mathfrak{M}) \prec \mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ schreiben.[1]) Sei nämlich $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ eine Umgebung der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ und

$$\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \cdots \geqq \varrho_\nu \geqq \cdots \tag{25}$$

eine monoton nach Null konvergierende Folge reeller Zahlen. Dann gilt

$$\mathfrak{U}_{\varrho_1}(\mathfrak{M}) \succ \mathfrak{U}_{\varrho_2}(\mathfrak{M}) \succ \mathfrak{U}_{\varrho_3}(\mathfrak{M}) \succ \cdots \tag{26}$$

In der Reihe (26) gibt es eine erste Umgebung $\mathfrak{U}_{\varrho_i}(\mathfrak{M})$, die in $\mathfrak{U}(\mathfrak{M})$ liegt. Wenn dies nicht zuträfe, so gäbe es in $C(\mathfrak{U}(\mathfrak{M}))$ eine Punktfolge

$$P_1, P_2, P_3, \ldots \tag{27}$$

von der Eigenschaft, daß $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\mathfrak{M}P_\nu} = 0$ wäre. Ein Häufungspunkt $Q$ der Folge (27) gehört ebenfalls der abgeschlossenen Punktmenge $C(\mathfrak{U}(\mathfrak{M}))$ an; da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, folgt aber aus $\overline{\mathfrak{M}Q} = 0$, daß $Q$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$ ist[2]), also nicht $C(\mathfrak{U}(\mathfrak{M}))$ angehören kann.

Die Variationsrechnung untersucht, unter welchen Voraussetzungen es einen zwei gegebene Punkte $P_0, P_1$ verbindenden Kurvenbogen $C_{P_0}^{P_1}$ gibt, dessen Bogenlänge gleich dem Abstand $\overline{P_0 P_1}$ ist. Ein solcher Kurvenbogen liefert für das Integral

$$\int_{P_0}^{P_1} F(x, x')\,dt \tag{28}$$

einen Wert, der nicht größer ist als jeder von einem anderen $P_0, P_1$ verbindenden Kurvenbogen gelieferte Integralwert. Die Problemstellung hängt dabei ab von den zur Konkurrenz zugelassenen Kurvenbogen $C_{P_0}^{P_1}$; wir ließen bisher alle zu, für die das Integral (28) sinnvoll war. Wir hätten aber ebensogut voraussetzen können, daß die in Betracht zu ziehenden Kurvenbogen (8) eine gewisse Anzahl stetiger Ableitungen besitzen, was wiederum für die Transformationen (2) Differenzierbarkeit der $\bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$ bis zur nämlichen Ordnung zur Folge haben müßte. Es kann ferner z. B. der Kurvenbogen $C_{P_0}^{P}$, der $P_0$ mit $P$ verbindet, einen kleinsten Wert (Minimum) liefern, wenn zur Konkurrenz nur Bogen einer Umgebung $\mathfrak{U}(C_{P_0}^{P})$ von $C_{P_0}^{P}$ (die $P_0$ mit $P$ verbinden) zugelassen sind, ohne für alle $P_0$ mit $P$ verbindenden Kurvenbogen ein Minimum liefern zu müssen.

Wir sprechen dann von einem *relativen Minimum*, und mit solchen haben wir uns in der Folge zu beschäftigen.

---

1) Das Zeichen $\prec$ ($\succ$) ist zu lesen: „liegt in" („enthält").

2) Denn in $\mathfrak{M}$ muß es einen Punkt $M$ geben, für den $\overline{MQ} = \overline{\mathfrak{M}Q}$ ist.

## § 2. Der Eulersche Vektor.

Die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$, die einstweilen noch nicht als in $\lambda$ homogen vorausgesetzt werde, sei viermal stetig differenzierbar. Ist dann

(1) $$x_i = x_i(t)$$

eine auf den für sie wesentlichen Parameter $t$ bezogene, zweimal stetig differenzierbare Kurve $C$ des $R_n$ (*Parameterkurve*, d. h. Raumkurve plus Parameter), so existiert in jedem ihrer Punkte $t$ der stetige Richtungsvektor $x_i$, $x_i'$ und demnach die stetige Funktion

(2) $$F(x, x').$$

Markieren wir durch zwei feste Punkte $P_0(t = t_0)$ und $P_1(t = t_1)$ den Bogen $C_{P_0}^{P_1}$ auf $C$, so hat das Integral

(3) $$J = \int_{t_0}^{t_1} F(x, x')\, dt$$

einen nur von diesem Parameterbogen (Kurvenbogen plus Parameter) abhängigen Wert.

Sollen *nur notwendige Bedingungen* dafür aufgestellt werden, daß $C_{P_0}^{P_1}$ unter allen $P_0$ mit $P_1$ verbindenden Parameterbogen ein Minimum liefert[1]), so genügt es, geeignet gewählte Klassen solcher Bogen heranzuziehen. Es sei im Bereiche

(4) $$t_0 \leqq t \leqq t_1, \quad -\eta \leqq \varepsilon \leqq \eta$$

eine zweimal stetig differenzierbare Mannigfaltigkeit $F_2$

(4') $$\bar{x}_i = x_i(t, \varepsilon)$$

mit der Eigenschaft definiert, daß jede $t$-Linie ($\varepsilon$ = konst.) die Punkte $P_0$ und $P_1$ verbinde. Dabei möge $P_0$ dem Parameter $t_0$ und $P_1$ dem Parameter $t_1$ entsprechen. Die Kurve $\varepsilon = 0$ sei die Kurve (1), deren Extremaleigenschaft zur Diskussion steht.

Analytisch lauten diese Aussagen:

(5) $$\begin{cases} x_i(t, 0) = x_i(t) & & & \\ x_i(t_0, \varepsilon) = x_i(t_0) & \text{also} \quad \dfrac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_0, \varepsilon) = 0 & \text{oder} & \lim\limits_{t=t_0} \dfrac{\partial x_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0 \\ x_i(t_1, \varepsilon) = x_i(t_1) & \quad ,, \quad \dfrac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}(t_1, \varepsilon) = 0 & \quad ,, & \lim\limits_{t=t_1} \dfrac{\partial x_i(t, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0. \end{cases}$$

1) Das Problem ist hier (anders als in § 1) ohne Bezugnahme auf eine Abstandsdefinition formuliert, die hier nicht immer gegeben werden kann, da das Integral (3) nicht allein von der Raumkurve $C_{P_0}^{P_1}$, sondern sehr wesentlich auch vom Parameter $t$ abhängt, auf den man diese bezieht.

Eine solche $F_2$ (4') nennen wir eine *Vergleichs-$F_2$*; gewöhnlich werden Vergleichs-$F_2$ einfachster Art betrachtet, nämlich

$$(6) \qquad x_i(t) + \varepsilon y_i(t), \quad y_i(t_0) = y_i(t_1) = 0,$$

deren besondere Form (Linearität in $\varepsilon$) aber vom Koordinatensystem abhängt. Setzen wir $x_i(t, \varepsilon)$ (bei festem $\varepsilon$) statt $x_i(t)$ in das Integral (3) ein, so wird dieses eine Funktion von $\varepsilon$, die mit $J(\varepsilon)$ bezeichnet werde.

Soll unser Bogen $\varepsilon = 0$ ein Minimum liefern, so muß $J'(\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ verschwinden. $J'(0) = [J'(\varepsilon)]_{\varepsilon=0}$ wollen wir *die erste Variation des Integrals* (3) in bezug auf den Bogen $C_{P_0}^{P_1}$ (1) nennen. Die erste Variation hängt also außer von diesem Bogen noch von der Wahl der Vergleichs-$F_2$ (4') ab. Verschwindet unabhängig davon, welche Vergleichs-$F_2$ wir verwenden, die erste Variation für einen Bogen $C_{P_0}^{P_1}$, so nennen wir diesen einen *Extremalbogen.*

*Ein Kurvenbogen, der das Integral* (3) *zu einem Minimum macht, ist demnach notwendig ein Extremalbogen.* Ob umgekehrt ein Extremalbogen dieses Integral zu einem Minimum macht, bedarf weiterer Untersuchungen. Man vermeinte anfangs, aus dem Verhalten von $J''(\varepsilon)$ diesbezügliche Schlüsse — analog der Theorie der gewöhnlichen Extrema — ziehen zu konnen, bis WEIERSTRASS die Unkorrektheit dieses Weges aufzeigte.

Wir wollen im folgenden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Extremaleigenschaft eines Kurvenbogens $C_{P_0}^{P_1}$ aufstellen.

Für $J'(\varepsilon)$ erhalten wir durch partielle Integration des zweiten Gliedes

$$(7) \qquad \begin{cases} J'(\varepsilon) = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial x_i'} \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial \varepsilon \, \partial t}\right] dt \\ \qquad = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial F(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F(\bar{x}, \bar{x}')}{\partial x_i'}\right)\right] \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varepsilon} \, dt, \end{cases}$$

da ja für $t = t_0$ und $t = t_1$ die Ableitungen $\dfrac{\partial \bar{x}_i}{\partial \varepsilon}$ verschwinden. Die Differentiation unter dem Integralzeichen, d. h. die Umformung

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \int \Phi(t, \varepsilon) \, dt = \int \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(t, \varepsilon) \, dt$$

ist infolge der Stetigkeit des Integranden in (7) erlaubt. Für $\varepsilon = 0$ erhalten wir aus (7)

$$(8) \qquad J'(0) = \int^{t_1} \left[\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i'}\right)\right] \frac{\partial x_i(t, 0)}{\partial \varepsilon} \, dt,$$

in welcher Formel wir, da ja $\varepsilon$ nicht vorkommt, $\frac{d}{dt}$ statt $\frac{\partial}{\partial t}$ geschrieben haben. Wir werden sofort beweisen, daß

$$(9) \qquad \varrho_i = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i'}\right)$$

in jedem Punkte einer beliebigen Parameterkurve ein kovarianter Vektor[1]) ist, den wir den *Eulerschen Vektor* der Parameterkurve nennen.

*Wir zeigen zuerst, daß ein Extremalbogen durch das Verschwinden des Eulerschen Vektors charakterisiert ist.* Vor allem sind die $\varrho_i(t)$ infolge der getroffenen Voraussetzungen über $F(x, \lambda)$ und die $x_i(t)$ stetige Funktionen von $t$. Ist nun für einen Wert $\tau$, für den $t_0 \leqq \tau \leqq t_1$ gilt, $\varrho_i(\tau) \neq 0$, so gibt es im entsprechenden Punkte $x_i(\tau)$ einen kontravarianten Vektor $\sigma^i$, so daß $\varrho_i(\tau)\,\sigma^i > 0$ ist. Es existiert dann ein Intervall $\tau - \eta \leqq t \leqq \tau + \overline{\eta}$, in dem ebenfalls $\varrho_i(t)\sigma^i > 0$ ist. Es sei nun $\alpha(t)$ eine außerhalb dieses Intervalles verschwindende und im Intervalle positive, zweimal stetig differenzierbare Funktion von $t$. Als Vergleichs-$F_2$ setzen wir dann an

$$(10) \qquad \bar{x}_i = x_i(t) + \varepsilon\alpha(t)\sigma^i;$$

wegen $\frac{\partial x_i(t, 0)}{\partial \varepsilon} = \alpha(t)\sigma^i$ ist dann

$$(11) \qquad J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \varrho_i(t)\sigma^i\alpha(t)\,dt > 0,$$

d. h. $C_{P_0}^{P_1}$ ist *kein* Extremalbogen. Da $\varrho_i = 0$ aber auch *hinreichend* für die Extremaleigenschaft des Bogens $C_{P_0}^{P_1}$ ist, so charakterisiert, wie behauptet, das Verschwinden des Eulerschen Vektors die Extremalen.

Wir hatten bisher alle zweimal stetig differenzierbaren Bogen (1) des $R_n$ zur Konkurrenz zugelassen. Wir fragen uns nun, wie weit unsere Überlegungen richtig bleiben, wenn wir das Variationsproblem für Kurven aufstellen, die in einer $r$ dimensionalen Hyperfläche $F_r$ des $R_n$ liegen, also verlangen, daß sowohl die Punkte $P_0, P_1$ wie auch alle sie verbindenden Bogen dieser $F_r$ angehören. Dieses Problem läßt sich in einfachster Art auf den eben behandelten Fall zurückführen. Ist

$$(12) \qquad x_i = x_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r),$$

eine Parameterdarstellung der $F_r$, so gilt für eine Kurve $\bar{x}_i(t)$ derselben

$$(13) \qquad F(x, x') = F\left(x(\bar{x}), \frac{\partial x}{\partial \bar{x}_\alpha}\bar{x}_\alpha'\right) = \overline{F}(\bar{x}, \bar{x}').$$

Im $r$ dimensionalen Raume $R_r\,\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r\}$ ist durch (13) eine Vektorfunktion bestimmt, die (wie $F(x, x')$) viermal stetig differenzierbar in bezug auf die

---

1) Der Beweis dafür ergibt sich am Schluß des Paragraphen von selbst. Was zunächst folgt, ist vom Vektorcharakter der $\varrho_i$ unabhängig.

$2r$ Argumente $\bar{x}, \bar{x}'$ ist, sobald $x_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r)$ als fünfmal stetig differenzierbar vorausgesetzt wird. Da im $R_r$ die zur Konkurrenz zugelassenen Kurven (außer der zweimal stetigen Differenzierbarkeit) keinen weiteren Einschränkungen unterworfen sind, so ist für den in der $F_r(\equiv R_r)$ liegenden Extremalbogen das Verschwinden des Eulerschen Vektors

(14) $$\bar{\varrho}_\alpha = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_\alpha'}\right), \qquad (\alpha = 1, \ldots, r)$$

charakteristisch. Nun ist nach (13)

(15) $$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_\alpha} = \frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_k'}\frac{\partial^2 x_k}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\alpha}\bar{x}_\beta', \quad \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{x}_\alpha'} = \frac{\partial F}{\partial x_k'}\frac{\partial x_k'}{\partial \bar{x}_\alpha},$$

also gilt

(16) $$\bar{\varrho}_\alpha = \frac{\partial F}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial x_k'}\frac{\partial^2 x_k}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\alpha}\bar{x}_\beta' - \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x_k'}\frac{\partial^2 x_k}{\partial \bar{x}_\beta \partial \bar{x}_\alpha}\bar{x}_\beta'$$

oder

(17) $$\varrho_\alpha = \varrho_k \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_\alpha}, \qquad (\alpha = 1, \ldots, r;\ k = 1, \ldots, n).$$

*Für die Extremalen einer $F_r$ des $R_n$ ist nach* (17) *notwendig und hinreichend, daß der Eulersche Vektor $\varrho_k$ (in bezug auf die Extremale als Kurve des $R_n$) normal steht auf dieser $F_r$.*[1]) In der Tat spannen ja die $r$ Vektoren

(18) $$\frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_1}, \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_2}, \ldots, \frac{\partial x_k}{\partial \bar{x}_r}$$

den Tangentenvektorraum der $F_r$ auf.

Durch (12) und (17) ist aber — für $r = n$ — nachgewiesen, daß die $2n$ Größen $x_i, \varrho_i$ die Bestimmungsstücke eines kovarianten Vektors (des Eulerschen Vektors) sind. In diesem Falle stellt (12) eine Koordinatentransformation dar und (12), (17) die einen kovarianten Vektor charakterisierende Transformation.

## § 3. Bemerkungen über den Eulerschen Vektor.

**A.** Verschwindet der Eulersche Vektor

(1) $$\varrho_i = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k''$$

für jeden (zweimal stetig differenzierbaren) Kurvenbogen, so hängt der Integralwert

(2) $$\int_{P_0}^{P_1} F(x, x')\, dt$$

1) Eine Extremale des $R_n$ ($\varrho_k = 0$), die in der $F_r$ liegt, ist natürlich eine Extremale der $F_r$ ($\bar{\varrho}_\alpha = 0$).

nur von den Endpunkten $P_0$ und $P_1$, aber nicht vom Bogen $C_{P_0}^{P_1}$ ab, und umgekehrt hat diese Eigenschaft von (2) stets $\varrho_i \equiv 0$ zur Folge, wenn wir die Einbettbarkeit zweier beliebiger Bogen mit gleichen Endpunkten in eine stetige einparametrige Schar solcher Bogen im betrachteten Raumstück voraussetzen. Wir können dann zwischen zwei Kurvenbogen, die $P_0$ mit $P_1$ verbinden, eine $F_2$ (2, 6) so legen, daß diesen Bogen die $\varepsilon$-Werte 0 und 1 zukommen. Aus $J'(\varepsilon) = 0$ (wegen $\varrho_i \equiv 0$) folgt dann $J(\varepsilon) =$ konst., also $J(0) = J(1)$.

Soll aber $\varrho_i$ identisch verschwinden, so muß $\dfrac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \, \partial x_k'}$ nach (1) identisch Null, d. h.

$$F(x, \lambda) = A_i(x)\, \lambda^i \tag{3}$$

sein. In diesem speziellen Falle ist

$$\varrho_j = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_i}\right) x_i', \tag{4}$$

und $\varrho_j \equiv 0$ hat die bekannte Relation

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} = 0 \tag{5}$$

für alle Punkte des $R_n$ als Voraussetzung. *Das Integral* (2) *ist also bei festgehaltener unterer Grenze* $P_0$ *dann und nur dann eine Funktion der oberen Grenze allein, wenn* $F(x, \lambda)$ *die Form* (3) *hat und wenn in jedem Punkte des* $R_n$ *die Tensorrelation* (5) *gilt.* Dabei ist als wesentlich vorausgesetzt, daß je zwei Bogen mit gleichen Endpunkten in eine einparametrige Schar stetig[1]) einbettbar, d. h. daß sie — in der Redeweise der Topologie — *homotop* sind.

**B.** Ist $F(x, \lambda)$ in $\lambda^i$ von der ersten Ordnung positiv homogen, so hängt der Integralwert (2) bei orientierten Kurven vom Parameter nicht ab, demgemäß ändert sich bei einer Parametertransformation der Extremalencharakter einer orientierten Kurve nicht. Ist $\bar{t} = \bar{t}(t)$ eine Parametertransformation, so gilt in diesem Falle

$$\varrho_i = \bar{\varrho}_i \bar{t}'(t) \tag{6}$$

für jeden Kurvenbogen. Man beweise diese Relation!

**C.** Wir setzen

$$G(x, x') = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i'} x_i'. \tag{7}$$

Dann gilt für jede Kurve

$$\frac{d}{dt}[F(x, x') - G(x, x')] = \varrho_i x_i'. \tag{8}$$

---

1) D. h. es soll die Kurvenschar (2, 4′) die dort genannten Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen erfüllen. Das bedeutet mehr als bloße Homotopie.

In der Tat ist

(8′) $$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial F}{\partial x_i'} x_i'', \quad \frac{dG}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i'} x_i'' + x_i' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right),$$

woraus (8) folgt. Somit ist für alle Kurven, für die

(9) $$\varrho_i x_i' = 0,$$

d. h. $\varrho_i$ ein Normalvektor ist,

(9′) $$F(x, x') - G(x, x') = \text{konst.}$$

Insbesondere ist dies für die Extremalen erfüllt, also ist $F(x, x') - G(x, x')$ ein Integral des durch $\varrho_i = 0$ definierten Systems von Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Funktion $x_i(t)$ (des Systems der Eulerschen Differentialgleichungen des Variationsproblems).

**D.** Ist $F(x, \lambda)$ in $\lambda^i$ von $k$ter Ordnung positiv homogen ($k$ braucht keine ganze Zahl zu sein), gilt also

(10) $$F(x, c\lambda) = c^k F(x, \lambda)$$

für positives $c$, so ist nach Euler

(11) $$G(x, x') = kF(x, x'),$$

was man aus (10) durch Differentiation nach $c$ (für $c = 1$) verifiziert. In diesem Falle lautet (8)

(12) $$(1 - k)\frac{dF(x, x')}{dt} = \varrho_i x_i'.$$

Ist $k = 1$ (dies ist der Hauptfall der Variationsrechnung, der in § 1 besonders hervorgehoben wurde), so gilt $\varrho_i x_i' = 0$, d. h. *der Eulersche Vektor jeder Kurve steht auf ihr normal.*

Ist $k \neq 1$, so *ist $F(x, x')$ ein Integral der Eulerschen Differentialgleichungen.*

Nehmen wir auf der Kurve $x_i = x_i(t)$ vermittels $t = t(\tau)$ eine Parametertransformation vor, so gilt

(13) $$\frac{dx_i}{d\tau} = x_i' \frac{dt}{d\tau},$$

also für positives $\frac{dt}{d\tau}$

(14) $$F\left(x, \frac{dx}{d\tau}\right) = F(x, x')\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^k.$$

Wir setzen (14) einer Konstanten gleich, die wir mit $\pm c^{-k}$ ($c > 0$) bezeichnen, je nachdem $F(x, x') \gtrless 0$ ist. Dies ergibt für $\tau$

(15) $$\tau = c\int \sqrt[k]{|F(x, x')|}\, dt + c_1.$$

Wir können also auf jeder Kurve, für die $F(x, x') \neq 0$ ist, einen Parameter einführen, für den $F(x, x')$ konstant wird. Dieser Parameter ist nach (15) bis auf lineare Transformationen bestimmt. Aus (12) folgt, daß der EULERsche Vektor einer auf einen solchen Parameter bezogenen Kurve ein Normalvektor dieser Kurve ist. Ist $F = g_{ik}\lambda^i\lambda^k$, so ist für die Bogenlänge als Parameter $\varrho_i = \frac{{}^{(2)}\xi_i}{\varrho_1}$, wie später gezeigt wird.

**E.** Sei $F(x, \lambda)$ in $\lambda^i$ positiv homogen. Wir betrachten die Variationsprobleme

(16)
$$\int [F(x, x')]^k \, dt$$
und

(17)
$$\int F(x, x') \, dt.$$
Aus der Identität

(18)
$$\frac{\partial F^k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^k}{\partial x_i'}\right) = k F^{k-1}\left[\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right)\right] - k(k-1) F^{k-2} \frac{\partial F}{\partial x_i'} \frac{dF}{dt}$$

folgt: Ist weder $F$ noch $F^k$ von erster Ordnung positiv homogen, so ist nach (12) für den Parameter der Extremalen $\frac{dF}{dt} = 0$, also folgt aus dem Verschwinden von $\frac{\partial F^k}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F^k}{\partial x_i'}\right)$ auch das von $\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right)$ und umgekehrt, d. h. jede Extremale von (16) ist auch Extremale von (17) und umgekehrt.

Ist jedoch $F$ oder $F^k$ von erster Ordnung positiv homogen, so können wir den Parameter so wählen, daß wieder $\frac{dF}{dt} = 0$ wird und somit dasselbe gilt wie oben. Es ist dabei vorausgesetzt, daß für die betrachteten Extremalen $F(x, x') \neq 0$ ist, d. h. daß sie keine *Nullextremalen* sind.

**F.** Man beweist durch Rechnung, daß

(19)
$$\frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial \lambda^i} = \sigma_i$$
ein kovarianter Vektor und

(20)
$$\frac{\partial^2 F(x, \lambda)}{\partial \lambda^i \partial \lambda^k} = \sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

ein (symmetrischer) kovarianter Tensor zweiter Stufe ist.

## § 4. Die Normalform des Systems der Eulerschen Differentialgleichungen.

Wir setzen voraus, daß für alle Vektoren $x_i$, $\lambda^i$ des $R_n$ die Determinante des in (3, 20) definierten Tensors $\sigma_{ik}$ von Null verschieden ist:

(1)
$$|\sigma_{ik}| \neq 0.$$

Da der Rang der Matrix eines Tensors eine Invariante ist, so ist die eben getroffene Voraussetzung vom Koordinatensystem unabhängig.

Sei $\sigma^{ij}$ der zu

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} \tag{2}$$

adjungierte symmetrische kontravariante Tensor zweiter Stufe, für den also

$$\sigma_{ik}\sigma^{ij} = \delta_k^j$$

gilt. Fur eine Kurve $C$ mit $x_i = x_i(t)$ erhalten wir dann durch Überschiebung von

$$\varrho_i = \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k''$$

mit $\sigma^{ij}$

$$x_j'' = \sigma^{ij}\left[\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \varrho_i\right]. \tag{3}$$

Für die Extremalen $\varrho_i = 0$ ist (3) dann das System der Eulerschen Differentialgleichungen in der Normalform, die wir kürzer

$$x_i'' = H_i(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') = H_i(x, x') \tag{4}$$

schreiben wollen. Da $F(x, \lambda)$ nach Voraussetzung viermal stetig differenzierbar ist, so sind die $H_i(x, x')$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente. Für allgemeine Kurven ($\varrho_i \neq 0$) gilt

$$x_j'' - H_j(x, x') = -\sigma^{ij}\varrho_i, \tag{5}$$

und somit definiert $x_j'' - H_j(x, x')$ längs jeder Kurve einen kontravarianten Vektor, dessen Verschwinden die Extremalen charakterisiert.

In dem gerade für die Variationsrechnung wichtigsten Fall, daß $F(x, \lambda)$ von erster Ordnung positiv homogen ist, verschwindet die Determinante (1), da ja dann

$$\frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k' = 0 \tag{6}$$

ist. Die eben angeführte Umformung der Eulerschen Differentialgleichungen in die Normalform (4) ist hier nicht ohne weiteres durchzuführen, da ja durch Integration von (4) eine Kurve mit einem im allgemeinen bestimmten Parameter geliefert wird, wogegen der Parameter der Extremalen im vorliegenden Falle weitgehend willkürlich ist. Doch gelingt es, gerade durch bestimmte Wahl des Parameters der Extremalen, die Eulerschen Gleichungen in die Normalform zu transformieren.

Wie wir sahen, sind ja die Extremalen (mit etwaiger Ausnahme der Nullextremalen) des Variationsproblems

$$\int [F(x, x')]^k \, dt \qquad (k > 1 \text{ positiv ganz}) \tag{7}$$

mit unseren identisch, wofern nur jener Parameter $t$ eingeführt wird, für den $F(x, x')$ konstant wird. Ist für irgendein $k$ die Determinante

$$\left| \frac{\partial^2 (F(x, x'))^k}{\partial x_i' \partial x_k'} \right| \neq 0, \tag{7'}$$

so lassen sich die Extremalen des Variationsproblems (7) in die Normalform bringen, die dann mit Ausnahme der Nullextremalen die Extremalen von $\int F(x, x')\,dt$ liefert. Der eben geschilderte Kunstgriff wird beim Variationsproblem des Riemannschen $R_n$

$$\int \sqrt{g_{ik}\, x_i'\, x_k'}\, dt \tag{8}$$

auch stets verwendet.

*Ist $F(x, \lambda)$ in $\lambda$ positiv homogen, so ist $H_i(x, \lambda)$ in $\lambda$ positiv homogen von der Ordnung zwei.* Zum Beweis bemerken wir, daß durch Einsetzen von $x_i'' = H_i(x, x')$ in das System der Eulerschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k'' = 0 \tag{9}$$

diese zu Identitäten in $x$ und $x'$ werden. In diese denken wir uns $c x'$ (mit positivem $c$) statt $x'$ gesetzt. Beachtet man nun, daß

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F(x, c x')}{\partial x_i} = c^k \frac{\partial F(x, x')}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 F(x, c x')}{\partial x_i' \partial x_k} c x_k' = c^k \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k', \\ &\frac{\partial^2 F(x, c x')}{\partial x_i' \partial x_k'} = c^{k-2} \frac{\partial^2 F(x, x')}{\partial x_i' \partial x_k'}, \end{aligned} \right. \tag{10}$$

ist, so folgt

$$H_i(x, c x') = c^2 H_i(x, x') \tag{11}$$

w. z. b. w.

Diese besondere Form der Funktionen $H_i(x, x')$ hat für die Extremalen, also für die Lösungskurven des Systems (4), die folgende Konsequenz: Das Existenztheorem für Systeme (4) in der Normalform besagt, daß es zu vorgegebenen Anfangswerten

$$x_1^0, \ldots, x_n^0; \quad \left(\frac{d x_1}{dt}\right)^0, \ldots, \left(\frac{d x_n}{dt}\right)^0, \tag{12}$$

d. i. zu einem vorgegebenen Vektor des $R_n$, *eine bestimmte Lösungskurve* $x_i = x_i(t)$ des Systems (4) gibt, deren Richtungsvektor für $t = t_0$ der Vektor (12) ist. Diese Extremale beziehen wir durch die Transformation

$$t = c(\tau - \tau_0) + t_0 \qquad (c > 0) \tag{13}$$

auf den Parameter $\tau$. Während im allgemeinen Fall die Extremale dadurch ihren Extremalencharakter verliert, bleibt hier bei dieser Parametertransformation wegen (11) der Extremalencharakter erhalten, d. h. $x_i(c(\tau-\tau_0)+t_0) = \tilde{x}_i(\tau)$ genügt mit $x_i(t)$ dem Systeme (4). In der Tat gilt

$$(14) \qquad x_i(t) = \tilde{x}_i(\tau), \quad \tilde{x}_i' = x_i' c, \quad \tilde{x}_i'' = x_i'' c^2,$$

also ist

$$(15) \qquad \tilde{x}_i'' - H_i(\tilde{x}, x') = c^2 x_i'' - H_i(\tilde{x}, c x') = c^2[x_i'' - H_i(x, x')] = 0,$$

w. z. b. w. Aber $\tilde{x}_i(\tau)$ ist jene Extremale, die für $\tau = \tau_0$ die Anfangswerte

$$(16) \qquad x_1^0, \ldots, x_n^0; \quad c\left(\frac{d x_1}{dt}\right)^0, \ldots, c\left(\frac{d x_n}{dt}\right)^0$$

annimmt. Also fallen — wie der Vergleich von (12) und (16) ergibt — alle Extremalen zusammen, die in einem bestimmten Punkte $x_1^0, \ldots, x_n^0$ des $R_n$ die „Richtung" $c\left(\frac{d x_1}{dt}\right)^0, \ldots, c\left(\frac{d x_n}{dt}\right)^0$, $(c > 0)$ besitzen; während im allgemeinen Falle mit $c$ diese Extremalen als Raumkurven variieren, ändert sich hier mit $c$ nur der Parameter $t$, und zwar gemäß der Relation (13).

## § 5. Die Normalkoordinaten mit einem Zentrum $P_0$.

Wir behandeln das *homogene Variationsproblem*, bei dem $F(x, \lambda)$ in $\lambda$ positiv homogen ist; weiter seien die Voraussetzungen erfüllt, die die Reduktion der EULERschen Differentialgleichungen auf die Normalform gestatten. Die Funktionen $H_i(x, x')$ sind dann zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente und in den $x_i'$ von zweiter Ordnung positiv homogen.

Eine Extremale (Kurve plus Parameter) wird durch den Tangentenvektor

$$(1) \qquad x_1^0, \ldots, x_n^0; \quad \left(\frac{d x_1}{ds}\right)^0, \ldots, \left(\frac{d x_n}{ds}\right)^0$$

eindeutig festgelegt. Ihr analytischer Ausdruck enthält daher außer dem Parameter $s$ die $2n$ Größen (1) und den Parameterwert $s_0$, für den ihr Tangentenvektor mit dem Vektor (1) identisch wird. Die Extremalen werden daher in der Form

$$(2) \qquad x_i = \varphi_i\left(s, s_0; \; x_1^0, \ldots, x_n^0; \; \left(\frac{d x_1}{ds}\right)^0, \ldots, \left(\frac{d x_n}{ds}\right)^0\right)$$

oder kurz

$$(2') \qquad x_i = \varphi_i\left(s, s_0, x^0, \left(\frac{d x}{ds}\right)^0\right)$$

dargestellt sein. Wie die Funktionen $H_i(x, x')$ sind die $\varphi_i$ in einer geeigneten Umgebung der Stelle $s_0, x^0, \left(\frac{d x}{d s}\right)^0$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente[1]) und haben wegen der Homogenität der $H_i(x, x')$ in $x_i'$ einen charakteristischen Bau, den wir jetzt aufweisen wollen. Die Parametertransformation

$$(3) \qquad s = a\bar{s} + b,$$

1) Vgl. BOLZA, *Variationsrechnung*, Leipzig 1909, S. 178, Zus. 1.

wo $a$, $b$ Konstante und $a > 0$ ist, führt die Extremale (2) über in die Extremale

$$x_i = \varphi_i\left(a\bar{s} + b,\ a\bar{s}_0 + b,\ x^0,\ \frac{1}{a}\left(\frac{dx}{d\bar{s}}\right)^0\right), \tag{4}$$

wo $\bar{s}_0$ aus $s_0 = a\bar{s}_0 + b$ zu berechnen ist. Da $\frac{dx_i}{ds} = \frac{1}{a}\frac{dx_i}{d\bar{s}}$ ist, durften wir $\frac{1}{a}\left(\frac{dx}{d\bar{s}}\right)^0$ statt $\left(\frac{dx}{ds}\right)^0$ setzen. Da für $\bar{s} = \bar{s}_0$ die Extremale (4) den Tangentenvektor

$$x_1^0, \ldots, x_n^0;\ \left(\frac{dx_1}{d\bar{s}}\right)^0, \ldots, \left(\frac{dx_n}{d\bar{s}}\right)^0 \tag{5}$$

hat, so ist sie identisch mit der durch (5) fixierten Extremalen

$$x_i = \varphi_i\left(\bar{s},\ \bar{s}_0,\ x^0,\ \left(\frac{dx}{d\bar{s}}\right)^0\right). \tag{6}$$

Es gelten daher mit der einzigen Einschränkung $a > 0$ die Identitäten (statt $\bar{s}$ wieder $s$ geschrieben)

$$\varphi_i\left(s,\ s_0,\ x^0,\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^0\right) \equiv \varphi_i\left(as + b,\ as_0 + b,\ x^0,\ \frac{1}{a}\left(\frac{dx}{ds}\right)^0\right). \tag{7}$$

Indem wir $b = -as_0$ setzen, spezialisieren wir (7) zu

$$\varphi_i\left(s,\ s_0,\ x^0,\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^0\right) \equiv \varphi_i\left(a(s - s_0),\ 0,\ x^0,\ \frac{1}{a}\left(\frac{dx}{ds}\right)^0\right), \tag{7'}$$

was wir nach Einführung der $n + 1$ Größen

$$\sigma = a(s - s_0), \quad \beta^i = \frac{1}{a}\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^0, \tag{8}$$

auch

$$\varphi_i\left(s,\ s_0,\ x^0,\ \left(\frac{dx}{ds}\right)^0\right) \equiv \varphi_i(\sigma,\ 0,\ x^0,\ \beta) \tag{9}$$

schreiben können. Die erlaubte Differentiation von (9) nach $a$ ergibt

$$0 \equiv \frac{\partial\varphi_i(\sigma, 0, x^0, \beta)}{\partial\sigma}(s - s_0) - \frac{\partial\varphi_i(\sigma, 0, x^0, \beta)}{\partial\beta^t}\left(\frac{dx_t}{ds}\right)^0\frac{1}{a^2} \tag{10}$$

oder

$$0 \equiv \frac{\partial\varphi_i}{\partial\sigma}\sigma - \frac{\partial\varphi_i}{\partial\beta^t}\beta^t. \tag{11}$$

Die $n$ Funktionen $\varphi_i$, als Funktionen der $n + 1$ Argumente (8) aufgefaßt, sind also Lösungen der homogenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial\Phi(\sigma, \beta)}{\partial\sigma}\sigma - \frac{\partial\Phi(\sigma, \beta)}{\partial\beta^t}\beta^t = 0. \tag{12}$$

Nun ist, wie man sofort überlegt,

$$\alpha_r = \sigma\beta^r = (s - s_0)\left(\frac{dx_r}{ds}\right)^0, \tag{13}$$

ein System von $n$ unabhängigen Lösungen von (12), und somit ist jede weitere, also jedes $\varphi_i$, eine Funktion dieser $n$ Lösungen, und wir haben also in

$$(14)\qquad x_i = \varphi_i\left(x_1^0, \ldots, x_n^0;\ \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^0(s-s_0), \ldots, \left(\frac{dx_n}{ds}\right)^0(s-s_0)\right)$$

den gesuchten analytischen Bau der die Extremalen des homogenen Variationsproblems darstellenden Funktionen.

Im System

$$(15)\qquad x_i = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

sind die Funktionen $\varphi_i$ zweimal stetig differenzierbar mit etwaiger Ausnahme der Stellen $x_1^0, \ldots, x_n^0; \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$. In der Tat sind die $\varphi_i$ als Funktionen von $s$ und den $2n$ Größen (1) wie die $H_i(x, x')$ zweimal stetig differenzierbar. Es gelten ja die Relationen

$$(16)\qquad \frac{\partial \varphi_i(x^0, \alpha)}{\partial \alpha_t} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial\left(\frac{dx_t}{ds}\right)^0} \frac{1}{s-s_0}$$

und

$$(16')\qquad \frac{\partial^2 \varphi_i(x^0, \alpha)}{\partial \alpha_t \partial \alpha_r} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial\left(\frac{dx_t}{ds}\right)^0 \partial\left(\frac{dx_r}{ds}\right)^0} \frac{1}{(s-s_0)^2}.$$

Für $s \neq s_0$ sind die Funktionen rechter Hand in bezug auf die Argumente $x_i^0$, $(s-s_0)$, $\left(\frac{dx_t}{ds}\right)^0$ stetig (Existenztheorem), die sie allein in der Form $x_i^0$, $\alpha_i = (s-s_0)\left(\frac{dx_i}{ds}\right)^0$ enthalten. Sie sind demnach für $s \neq s_0$ stetige Funktionen der $x_i^0$ und der $\alpha_t$, w. z. b. w.[1])

Wir treffen nun die Vereinbarung, daß auch für die Stellen

$$x_1^0, \ldots, x_n^0;\ \alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$$

die ersten Ableitungen der Funktionen $\varphi_i$ nach den $\alpha_t$ bestehen mögen und daselbst stetig seien[2]); die Berechnung der $\frac{\partial \varphi_i(x^0, 0)}{\partial \alpha_t}$ ist dann in einfachster

---

1) Es wurde bei diesem Schlusse die triviale Tatsache verwendet: Ist $\Phi$ eine stetige Funktion der $2m$ Argumente $u_1, \ldots, u_m; v_1, \ldots, v_m$, die sie in der Zusammenfassung $w_1 = u_1 v_1, \ldots, w_m = u_m v_m$ enthält, so ist sie als Funktion dieser $m$ Größen stetig, wenn der Bereich der $u_i$ oder der $v_i$ unbeschränkt ist. Wir hatten $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = (s-s_0)$, $v_i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^0$. Der Bereich der $v_i$ ist unbeschränkt.

2) Es ist sicher möglich diese Voraussetzung einzuschränken. Die Existenz der Ableitungen an den kritischen Stellen kann man z. B. nachweisen (durch Grenzbildung aus den entsprechenden Differenzenquotienten). Die eben getroffene Vereinbarung in ihrem ganzen Umfange zu beweisen, ist uns aber nicht geglückt.

Weise möglich. Aus (15) folgt durch Differentiation nach $s$ (also längs der Extremalen)

(17) $$\frac{d x_i}{ds} = \frac{\partial \varphi_i(x^0, \alpha)}{\partial \alpha_t} \left(\frac{d x_t}{ds}\right)^0$$

und für $s \longrightarrow s_0$

(18) $$\left(\frac{d x_i}{ds}\right)^0 = \frac{\partial \varphi_i(x^0, 0)}{\partial \alpha_t} \left(\frac{d x_t}{ds}\right)^0.$$

Da (18) für jede Extremale durch $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ gilt und somit eine Identität in den $\left(\frac{d x_i}{ds}\right)^0$ ist, folgt

(19) $$\frac{\partial \varphi_i(x^0, 0)}{\partial \alpha_t} = \delta_{it}.$$

Das System

(20) $$x_i^0 = x_i^0, \quad x_i = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0; \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

dessen Funktionaldeterminante an der Stelle $x_i^0, \alpha_i = 0$ nach (19) den Wert Eins hat, ordnet jedem Wertesystem $\tilde{x}_i^0, \alpha_i$ einer gewissen Umgebung dieser Stelle ein Wertesystem $\tilde{x}_i^0, x_i$ ein-eindeutig zu, und zwar bilden diese $\tilde{x}_i^0, x_i$ eine Umgebung der Stelle $x_i^0, x_i^0$ (die ihrerseits der Stelle $x_i^0, 0$ entspricht). Ist

(21) $$x_i^0 = x_i^0, \quad \alpha_i = \psi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \ x_1, \ldots, x_n),$$

das (für die Umgebung $x_i^0, x_i^0$) zu (20) inverse System, so sind die Funktionen $\psi_i$ einmal und mit Ausnahme der Stelle $x_i^0, x_i^0$ sogar zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente.

Es seien $\bar{x}_i^0, \bar{x}_i$ zwei Punkte in einer genügend begrenzten Umgebung von $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Dem $2n$-Tupel $\bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ entspricht dann nach (21) ein bestimmtes $2n$-Tupel $\bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0; \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ der entsprechenden Umgebung von $x_1^0, \ldots, x_n^0, 0, \ldots, 0$. Führen wir dieses $2n$-Tupel $(\bar{x}^0, \bar{\alpha})$ in (20) ein, so folgt

(22) $$\bar{x}_i = \varphi_i(\bar{x}_1^0, \ldots, \bar{x}_n^0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n).$$

*Das heißt aber, daß man um einen Punkt $P_0$ eine Umgebung derart bestimmen kann, daß durch je zwei Punkte $\bar{x}_i^0, \bar{x}_i$ derselben eine Extremale* (22) *gezogen werden kann und zwar nur eine, für die $\bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_n$ in einer entsprechend gewählten Umgebung von $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ liegt.* Denn setzt man $\bar{\alpha}_i t$ statt $\bar{\alpha}_i$, so wird (22) eine Extremale, die für $t = 1$ den Punkt $\bar{x}_i$ und für $t = 0$ den Punkt $\bar{x}_i^0$ enthält.

Nach dieser recht wichtigen Erkenntnis, die uns zeigt, daß die Extremalen des Variationsproblems (sobald die von uns getroffenen Vereinbarungen erfüllt sind) in der Umgebung eines Punktes — d. h. in genügend „klein" gewählten Raumstücken — sich ähnlich den euklidischen Geraden verhalten, definieren wir den auch für die Differentialgeometrie fundamentalen Begriff der *Normalkoordinaten mit einem Zentrum* $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Wir fassen bei Fixierung des Punktes $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ das Teilsystem von (20), (21)

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} x_i &= \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\\ \alpha_i &= \psi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}\right.$$

als Koordinatentransformation für die Punkte der genannten Umgebung von $P_0$ auf. Das neue Koordinatensystem heißt ein RIEMANNsches Normalkoordinatensystem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ (das sind die neuen Koordinaten des Punktes $P_0$) als Zentrum. *Wir wollen allgemein ein Koordinatensystem ein Normalkoordinatensystem mit dem Zentrum $P_0$ nennen, wenn in ihm die Gleichungen der Extremalen durch $P_0$ im Parameter $s$ linear sind.* Im Koordinatensystem $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sind

$$(24)\qquad \alpha_i = \xi^i s$$

mit konstanten $\xi^i$ die Gleichungen der Extremalen durch $P_0$, wie man durch Einsetzen von (24) in $x_i = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ohne weiteres einsieht.

Es sei $\mathfrak{U}(P_0)$ eine Umgebung von $P_0$ (offene, $P_0$ enthaltende Punktmenge), in der RIEMANNsche Normalkoordinaten einführbar sind. Weiter sei (für den folgenden Schluß) wie in § 1 das Variationsproblem positiv definit. Wir denken uns dann mittels $F(x, x') = 1$ auf jeder Kurve den Parameter „Bogenlänge" gegeben. Der in $\mathfrak{U}(P_0)$ von $P_0$ nach einem Punkte $P$ längs der betreffenden Extremalen gezählte Bogen heiße der „Abstand" $\overline{P_0 P}$, der aber mit dem in § 1 definierten Abstand nur dann identisch ist, wenn die Extremalen $P_0 P$ für das Integral $\int\limits_{P_0}^{P} F(x, x')\,dt$ ein Minimum liefern. Auf jeder Extremalen (24) durch $P_0$ gibt es dann ein kleinstes $s$, fur das der Punkt $\alpha_i = \xi^i s$ nicht mehr zu $\mathfrak{U}(P_0)$ gehört. Wir bezeichnen mit $\varrho = \varrho(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ diesen kleinsten Wert und mit $\varrho_0 \geqq 0$ die untere Grenze aller Werte $\varrho$. Wir behaupten, daß $\varrho_0 > 0$ ist. Wäre nämlich $\varrho_0 = 0$, so gäbe es in der Komplementärmenge $C(\mathfrak{U}(P_0))$ von $\mathfrak{U}(P_0)$ eine Punktfolge $P_1, P_2, \ldots$, deren Abstände $\varrho_1, \varrho_2, \ldots$ von $P_0$ nach Null konvergierten. Im Koordinatensystem $x_i$ seien

$$(25)\qquad \underset{h}{x_i} = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0;\ \underset{h}{\xi^1}\varrho_h, \ldots, \underset{h}{\xi^n}\varrho_h)$$

die Koordinaten von $P_h$. Nun gilt (§ 1) für Vektoren $x_i, \lambda^i$, für die $F(x, \lambda) = 1$ ist („Einheitsvektoren")

$$\frac{1}{B} \geqq \text{Max.}\,\lambda.$$

Da nach Einführung der Bogenlänge $s$ die $\frac{d\alpha_i}{ds} = \xi^i = \left(\frac{dx_i}{ds}\right)^0$ Einheitsvektoren sind, so ist $\frac{1}{B} \geqq \text{Max.}\, \xi$, also $\lim_{h=\infty} \xi^i_h \varrho_h = 0$, da $\varrho_h \to 0$. Aus (25) erhält man daher für den Grenzpunkt der Folge $P_1, P_2, \ldots$

$$(25') \qquad \lim_{h=\infty} x_{i_h} = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0;\; 0, \ldots, 0) = x_i^0,$$

d. h. $P_0$ ist der Grenzpunkt von $P_1, \ldots, P_\nu, \ldots$ Da aber $P_0 \prec \mathfrak{U}(P_0)$ und $P_1, P_2, \ldots \prec C(\mathfrak{U}(P_0))$ und $C(\mathfrak{U}(P_0))$ als Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist, also den Grenzpunkt $P_0$ von $P_1, P_2, \ldots$ enthält, so gilt auch $P_0 \prec C(\mathfrak{U}(P_0))$ im Widerspruch zu $P_0 \prec \mathfrak{U}(P_0)$. Also muß in der Tat $\varrho_0 > 0$ sein.

Die Gesamtheit aller in $\mathfrak{U}(P_0)$ gelegenen Punkte, deren auf der Extremalen von $P_0$ aus gemessene Abstand kleiner als $\varrho_0$ ist, heiße *$\varrho_0$-Umgebung von $P_0$* und sei mit $\mathfrak{U}_{\varrho_0}(P_0)$ bezeichnet. Auch sie ist mit der ebenso bezeichneten Umgebung des § 1 nicht immer identisch. Wir wollen diese $\varrho_0$-Umgebung auch eine *offene Kugel* vom *Radius* $\varrho_0$ oder kurz *$\varrho_0$-Kugel* nennen. In einer solchen $\varrho_0$-Kugel liegt jeder Punkt $P$ auf einem Extremalbogen $P_0P$, der ganz in $\mathfrak{U}_{\varrho_0}(P_0)$ liegt. Da es stets Umgebungen $\mathfrak{U}(P_0)$ gibt, in denen es (wenn die diesbezüglichen Festsetzungen erfüllt sind) Normalkoordinaten mit $P_0$ als Zentrum gibt, so gibt es für genügend kleine $\varrho_0$ stets solche $\varrho_0$-Kugeln $\mathfrak{U}_{\varrho_0}(P_0)$.

## § 6. Charakterisierung der Normalkoordinaten durch die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$.

Da die in den Transformationsformeln (5, 23) auftretenden Funktionen zweimal stetig differenzierbar sind (außer in $P_0$), kann man für jede zweimal stetig differenzierbare Kurve $x_i = x_i(t)$ in jedem ihrer Punkte (etwa mit Ausnahme des Punktes $P_0$) den Eulerschen Vektor $\varrho_i$ im Normalkoordinatensystem bilden. Für Extremalen verschwinden seine Komponenten. Wir erinnern weiter, daß längs der Extremalen $F(x, x')$ konstant ist. Für die Extremalen durch $P_0$[1])

$$(1) \qquad x_i = \xi^i s$$

gilt also

$$(2) \qquad F(x, \xi) = F(0, \xi).$$

1) Da wir jetzt ausschließlich die Normalkoordinaten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ verwenden, behalten wir die ursprüngliche, dem Leser wie dem Schreiber gleich gewohnte Koordinatenbezeichnung $x_1, \ldots, x_n$ für die Normalkoordinaten bei. Ebenso bedeutet jetzt $F(x, x')$ die Vektorfunktion im Normalkoordinatensystem, wobei $F(x, x')$ — in der ursprünglichen Bezeichnung — eigentlich $F\left(\varphi_1, \ldots, \varphi_n;\; \frac{\partial \varphi_1}{\partial \alpha_j}\alpha_j', \ldots, \frac{\partial \varphi_n}{\partial \alpha_j}\alpha_j'\right)$ lautet.

Es existieren ja die Funktionen[1])

$$F(x, \xi), \quad \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi^i}, \quad \frac{\partial^2 F(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^k}$$

und sind außerdem stetig; dasselbe gilt, aber eventuell mit Ausnahme von $P_0$, für die Funktionen

$$\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 F(x,\xi)}{\partial x_i \partial \xi^k}.$$

Nun berücksichtigen wir den Extremalcharakter der Kurven (1); für sie verschwindet der Eulersche Vektor, und somit ist (ausgenommen etwa in $P_0$)

$$0 = \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x_i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi^i}\right). \tag{3}$$

Wir setzen

$$\xi_i = \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi^i}, \quad \xi_{i0} = \frac{\partial F(0,\xi)}{\partial \xi^i}; \tag{4}$$

dabei kann $\xi_{i0}$ wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \xi^i}$ auch als Grenzlage des kovarianten Vektors $\xi_i$ angesehen werden, wenn man ihn längs $x_i = \xi^i s$ nach $P_0$ führt. Wir können (3) jetzt schreiben

$$0 = \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x_i} - \frac{d\xi_i}{ds} \tag{5}$$

oder

$$\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x_i} = \frac{d(\xi_i - \xi_{i0})}{ds}. \tag{5'}$$

Da die Vektorfunktion $F(x, \lambda)$ in den $\lambda^i$ positiv homogen ist, folgt aus (2), wenn wir $\xi^i = \frac{x_i}{s}$ $(s > 0)$ in $F(x, \xi)$ einsetzen,

$$F(x, x) = F(0, x). \tag{6}$$

Differenzieren wir (6) nach $x_i$, was ja — ausgenommen etwa in $P_0$ — gestattet ist, so erhalten wir[2])

$$\frac{\partial F(x,x)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x,x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0,x)}{\partial \xi^i}. \tag{7}$$

Ist $F(x, \lambda)$ von $k$ter Ordnung positiv homogen, so ist $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ von $k$ter, $\frac{\partial F}{\partial \xi^i}$ dagegen nur von $k-1$ter Ordnung positiv homogen. Die Multiplikation von (7) mit $s^{-k}$ ergibt demnach wegen (4)

$$s\,\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x_i} + \xi_i - \xi_{i0} = 0. \tag{8}$$

---

1) Und zwar in der Umgebung von $P_0$, in der die Normalkoordinaten eingeführt wurden.

2) $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ ist die Ableitung nach dem $i$ten Argument in $F$, $\frac{\partial F}{\partial \xi^i}$ und $\frac{\partial F}{\partial x_i'}$ die nach dem $n+i$ten Argument.

Wegen (5′) folgt weiter

(9) $$\frac{d(\xi_i - \xi_{i0})}{ds} + \frac{1}{s}(\xi_i - \xi_{i0}) = 0$$

oder integriert

(9′) $$\xi_i - \xi_{i0} = \frac{c_i}{s},$$

mit konstantem $c_i$. Da aber längs der Extremalen $x_i = \xi^i s$ der stetige kovariante Vektor $\xi_i$ für $s \to 0$ nach $\xi_{i0}$ strebt, so muß $c_i = 0$ sein, also gilt

(9″) $$\xi_i = \xi_{i0}.$$

Wir erhalten demnach als notwendige Bedingungen für Normalkoordinaten mit dem Zentrum $(0, \ldots, 0)$

(10) $$\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, \xi)}{\partial \xi^i}$$

oder

(10′) $$\frac{\partial F(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, x)}{\partial \xi^i}$$

und weisen sofort nach, daß diese Bedingungen auch hinreichen. Wegen der Homogenität der Funktionen $F(x, \xi)$ erhalten wir durch Überschiebung von (10) mit $\xi^i$

(11) $$F(x, \xi) = F(0, \xi) \quad \text{oder} \quad F(x, x) = F(0, x).$$

Daraus folgt weiter durch Differentiation nach $x_i$

(12) $$\frac{\partial F(x, x)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial F(0, x)}{\partial \xi^i},$$

also nach (10′)

(13) $$\frac{\partial F(x, x)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} = 0.$$

Wir bilden jetzt den Eulerschen Vektor der Kurven $x_i = \xi^i s$ mit konstanten $\xi^i$. Aus (10) folgt

(14) $$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i}\right) = 0,$$

da ja längs $x_i = \xi^i s$ die Vektorfunktion $\frac{\partial F(0, \xi)}{\partial \xi^i}$ mit dem Vektor $\xi^i$ konstant ist. Also ist

(15) $$\varrho_i = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial x_i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \xi^i}\right) = 0,$$

d. h. die Kurven $x_i = \xi^i s$ ($\xi^i$ konstant) sind Extremalen.

## § 7. Die Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion.

Ist $F(x, \lambda)$ von $k$ter Ordnung positiv homogen, so ist

$$\Phi(x, \lambda) = \sqrt[k]{|F(x, \lambda)|} \tag{1}$$

von erster Ordnung positiv homogen. Um Fallunterscheidungen aus dem Wege zu gehen, sei das Variationsproblem jetzt positiv definit vorausgesetzt, d.h. es sei

$$\Phi(x, \lambda) \geqq 0 \tag{1'}$$

und $= 0$ nur für Nullvektoren. Durch $\Phi(x, x') = 1$ fixieren wir auf jeder Kurve die (bis auf eine additive Konstante bestimmte) Bogenlänge. Wir operieren in Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0(0, \ldots, 0)$. Die Extremalen durch $P_0$ haben die Gleichungen

$$x_i = \xi^i s, \quad \frac{d x_i}{d s} = \xi^i, \quad \xi^i = \text{konst.}, \tag{2}$$

wobei, da $s$ die Bogenlänge ist,

$$\Phi(x, \xi) = 1 \tag{3}$$

ist. Uns interessiert das Variationsproblem $\int \Phi(x, x')\,dt$, in welchem, wie wir wissen, die Extremalen keinen bestimmten Parameter haben. Die Forderung (3) für Extremalen bedeutet also keine Einschränkung.

Nun zeigen wir, daß die Relationen (6, 10) oder (6, 10′), die für $F(x, \lambda)$ gelten, auch für $\Phi(x, \lambda)$ richtig sind. Aus (6, 10) folgt (6, 11) und daher

$$\Phi(x, x) = \Phi(0, x). \tag{4}$$

Setzt man $F = \Phi^k$ in (6, 10), so erhält man

$$\frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(0, \xi)}{\partial \xi^i} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \Phi(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(0, x)}{\partial \xi^i}, \tag{5}$$

w. z. b. w. Durch (2) ist in jedem Punkte der Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$, in welcher die Normalkoordinaten konstruiert wurden, die Funktion $s$ definiert, für die nach (3)

$$\Phi(x, x) = s \tag{6}$$

oder wegen (4)

$$\Phi(0, x) = s \tag{6'}$$

gilt. Daraus folgt durch partielle Ableitung $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi^i}\right.$ ist von nullter Ordnung homogen$\left.\right)$

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi(0, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(x, x)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi\left(x, \frac{x}{s}\right)}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i} \tag{7}$$

oder

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \xi_i, \quad \xi_i = \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i}. \tag{8}$$

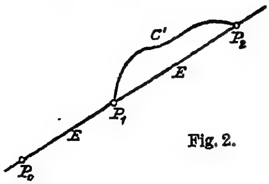


Fig. 2.

In der Kette der Relationen (7) ist $s \neq 0$ vorausgesetzt worden, d. h., daß (8) höchstens mit Ausnahme von $P_0(0, \ldots, 0)$ gilt. Nun seien auf der Extremalen (2), die mit $E$ bezeichnet sei, durch $s = s_1$ und $s = s_2$, $s_2 > s_1$, zwei Punkte $P_1$ und $P_2$ laut Fig. 2 markiert. Ferner sei $C$ ein $P_1$ und $P_2$ verbindender Bogen, der $P_0$ nicht enthalte. Wir bilden dann die Integraldifferenz ($E$ bedeutet jetzt den Bogen von $P_1$ nach $P_2$ auf der Extremalen, was wir kurz mit $E(P_1 P_2)$ oder $E_{P_1}^{P_2}$ bezeichnen)

$$\Delta J = \int_C \Phi(x, x')\,dt - \int_E \Phi(x, x')\,dt. \tag{9}$$

Nun ist

$$\int_E \Phi(x, x')\,dt = \int_E \Phi(x, \xi)\,ds = \int_E ds = s_2 - s_1. \tag{10}$$

Aber nach (8) gilt weiter

$$s_2 - s_1 = \int_C ds = \int_C \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\,dx_i = \int_C \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\,x_i'\,dt. \tag{11}$$

Wir können $\Delta J$ daher durch ein Integral über den Bogen $C$ allein darstellen:

$$\Delta J = \int_C \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\right] x_i'\,dt = \int_C \mathcal{E}(x, x', \xi)\,dt, \tag{12}$$

wo die in $x_i'$ von erster Ordnung positiv homogene Funktion

$$\mathcal{E}(x, x', \xi) = \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\right] x_i' \tag{13}$$

die sogenannte Weierstrasssche *$\mathcal{E}$-Funktion* ist. Ihrer Bildung nach ist die $\mathcal{E}$-Funktion als inneres Produkt eines kovarianten Vektors $\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}$ mit einem kontravarianten Vektor $x_i'$ eine Invariante; also gilt die Relation (12), die ja im Normalkoordinatensystem unter weitgehender Ausnutzung der ein solches charakterisierenden Relationen abgeleitet wurde, unabhängig von einem jeden Bezugssystem. Dabei ist $\xi^i$ stets der — im allgemeinen nicht mehr längs der Extremalen durch $P_0$ *konstante* — Richtungsvektor der den betrachteten Punkt mit $P_0$ verbindenden Extremalen.

Die Funktion $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ ist, da $\xi^i = \frac{x_i}{s}$ ein (mit Ausnahme von $P_0$) stetiger Ortsvektor der Umgebung von $P_0$ ist, in dieser Umgebung eine stetige Funktion von $x$ und $x'$. Wenn wir den zwischen $P_1$ und $P_2$ genommenen Extremalbogen $E_{P_1}^{P_2}$ auf seinen wahren Extremalcharakter untersuchen, können wir, sobald wir nur Kurven zur Konkurrenz zulassen, die in der durch die

Normalkoordinaten beschriebenen Umgebung $\mathfrak{U}(P_0)$ liegen, mit Vorteil die Formel (12) verwenden. Ist das Integral

$$\Delta J = \int\limits_C \mathcal{E}(x, x', \xi)\,dt \tag{14}$$

in einer Umgebung $\mathfrak{U}(E_{P_1}^{P_2})$ der Extremalen $E_{P_1}^{P_2}$ für jeden $P_1$ und $P_2$ verbindenden Bogen dieser Umgebung nicht negativ, so liefert $E_{P_1}^{P_2}$ ein Minimum für die Kurven dieser Umgebung. Dies ist sicher der Fall, wenn in $\mathfrak{U}(E_{P_1}^{P_2})$ die Funktion $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ „wesentlich" positiv ist (d. h. positiv mit Ausnahme der Stellen $x_i' = \xi^i$, an denen $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ der Definition nach Null wird). Andrerseits kann der Extremalbogen $\widehat{P_0 P}$ (man kann $P_0$ immer zum Zentrum eines Riemannschen Normalkoordinatensystems machen) kein Minimum liefern, wenn für irgendeinen Vektor $x_i, x_i'$, der in einem Zwischenpunkte $B(x_i)$ von $\widehat{P_0 P}$ definiert ist, $\mathcal{E}(x, x', \xi) < 0$ ist. In der Tat kann man wegen der Stetigkeit von $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ einen stetig differenzierbaren Bogen $\widehat{AB}$ (Fig. 3) so konstruieren, daß $x_i, x_i'$ seine Tangente in $B$ ist und $\mathcal{E}(x, x', \xi)$ längs $\widehat{AB}$ kleiner als Null bleibt. Als Vergleichskurve zu $E_{P_0}^{P}$ verwenden wir dann den Streckenzug

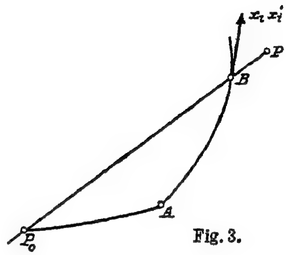

Fig. 3.

$$\widehat{P_0 A} + \widehat{AB} + \widehat{BP},$$

wo $\widehat{P_0 A}$ der $P_0$ mit $A$ verbindende Extremalbogen ist. Wir können dabei $A$ so nahe an $B$ wählen, daß dieser Streckenzug ganz in einer vorgegebenen Umgebung $\mathfrak{U}(E_{P_0}^{P})$ von $E_{P_0}^{P}$ verbleibt. Dann gilt

$$\left\{\begin{aligned} \Delta J &= \left[\int\limits_{P_0}^{A} ds + \int\limits_{A}^{B} \Phi(x, x')\,dt + \int\limits_{B}^{P} ds\right] - [s(P) - s(P_0)] \\ &= \int\limits_{A}^{B} \Phi(x, x')\,dt - [s(B) - s(A)] = \int\limits_{A}^{B} \mathcal{E}(x, x', \xi)\,dt < 0, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

d. h. $E_{P_0}^{P}$ liefert kein relatives Minimum.

Die Konstruktion der $\mathcal{E}$-Funktion erforderte, daß sich der untersuchte Extremalbogen in ein „Feld" von Extremalbögen, wie z. B. die Extremalen durch $P_0$ eines sind, einbetten ließ. Das im vorhergehenden betrachtete Extremalenfeld ist aber von spezieller Natur; wir werden jetzt versuchen eine Methode zur Herleitung allgemeinerer Resultate zu gewinnen.

## § 8. Allgemeine Herleitung der $\mathcal{E}$-Funktion.

Wir erinnern, daß wir in § 1 den $R_n$ als topologische Kugel voraussetzten. In ihm sind demnach je zwei Bogen mit gleichen Endpunkten homotop (vgl. § 3 A).

Wir wollen nun einen kontravarianten Vektor $x_i, \xi^i$ in jedem Punkte des $R_n$ so bestimmen, daß bei Festlegung der unteren Grenze $P_0$ das Integral

$$\int_{P_0}^{P} \frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial x_i'} d x_i \tag{1}$$

eine Funktion der Koordinaten des Punktes $P$ allein ist, d. h. von der speziellen Gestalt des Integrationsweges, der von $P_0$ nach $P$ führt, nicht abhängt. [In § 7 war $s$ eine solche Funktion, vgl. (7, 8).] Dabei ist $\Phi(x,\xi)$ die im vorhergehenden betrachtete, in den $\xi^i$ von erster Ordnung positiv homogene Vektorfunktion. Setzt man

$$\frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial x_i'} = \xi_i, \tag{2}$$

so ist nach (3, 5)

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = 0 \tag{3}$$

in jedem Punkte des $R_n$ notwendig und hinreichend für die Unabhängigkeit des Integrals (1) vom Wege. Aus (3) folgt für den gesuchten Vektor $x_i, \xi^i$ das System partieller Differentialgleichungen

$$\pi_{ik} = \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial x_k} + \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\frac{\partial \xi^j}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^k \partial x_i} - \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^k \partial \xi^j}\frac{\partial \xi^j}{\partial x_i} = 0. \tag{4}$$

Ist $\xi^i$ eine Lösung von (4), so erhält man durch Integration von

$$\frac{d x_i}{dt} = \xi^i(x_1, \ldots, x_n) \tag{5}$$

eine Schar von Kurven, die wir *die Gefällskurven des Vektorfeldes* $x_i, \xi^i$ nennen wollen. Ist $x_i = x_i(t)$ eine Gefällskurve, so gilt (5) und durch nochmalige Differentiation nach $t$ folgt

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_k}\xi^k. \tag{6}$$

Nun ist nach Euler

$$\frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^k \partial x_i}\xi^k = \frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^k \partial \xi^j}\xi^k = 0; \tag{7}$$

durch Überschiebung von (4) mit $\xi^k$ ergibt sich also

$$\pi_{ik}\xi^k = \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial x_k}\xi^k + \frac{\partial^2 \Phi(x,\xi)}{\partial \xi^i \partial \xi^j}\frac{\partial \xi^j}{\partial x_k}\xi^k - \frac{\partial \Phi(x,\xi)}{\partial x_i} = 0; \tag{8}$$

wegen (5) und (6) gilt somit für Gefällskurven

$$\frac{\partial \Phi(x,x')}{\partial x_i} - \frac{\partial^2 \Phi(x,x')}{\partial x_i' \partial x_k} x_k' - \frac{\partial^2 \Phi(x,x')}{\partial x_i' \partial x_k'} x_k'' = 0, \tag{9}$$

d. h. *die Gefällskurven sind Extremalen.*

Im $R_2$ ist jedes Feld von Extremalen ein Gefällskurvenfeld, d. h. die Tangenten $x_i, x_i'$ eines Extremalenfeldes sind, wenn wir $x_i' = \xi^i$ setzen, Lösungen des Systems (4), oder, was dasselbe besagt, $\xi^i$ macht das Integral (1) vom Wege unabhängig. In der Tat folgt aus (9) oder $\pi_{ik}\xi^k = 0$ im $R_2$

$$\pi_{12}\xi^2 = 0, \quad \pi_{21}\xi^1 = 0, \tag{10}$$

da ja $\pi_{ik} = -\pi_{ki}$ ist. Da wir ein reguläres Extremalenfeld voraussetzen, d. h. in jedem Punkte einer Extremalen des Feldes eine bestimmte Tangente, so kann nicht zugleich $\xi^1$ und $\xi^2$ verschwinden. Aus (10) folgt also

$$\boldsymbol{\pi_{12} = 0},$$

was den Inhalt des bekannten *Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes* (das Integral (1) vom Wege unabhängig) wiedergibt.

Im $R_n$, $n > 2$, kann nicht jedes Extremalenfeld ein Gefällskurvenfeld sein. Denn genügt ein Raumvektor $x_i, \xi^i$ dem System (4), so ist

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \int_{P_0} \xi_i \, dx_i, \quad \xi_i = \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial \xi^i} \tag{11}$$

eine eindeutige Funktion. Die einparametrige Hyperflächenschar $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \text{konst.}$ schneidet wegen $\xi_i dx_i = 0$ die *„Gefällsparameter"* $\xi_i$ senkrecht. Im allgemeinen aber ist im $R_n$ ein durch $\xi_i dx_i = 0$ (in jedem Punkte des $R_n$) gegebener $n-1$ dimensionaler Vektorraum $dx_i$ nicht integrabel, d. h. im allgemeinen gibt es keine Schar $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \text{konst.}$, so daß $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ proportional zu $\xi_i$ ist. Jedenfalls ist die Existenz einer Schar von Hyperflächen $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \text{konst.}$, die das Extremalenfeld (d. h. die Gefällsparameter) senkrecht schneidet, notwendig, wenn dieses ein Gefällskurvenfeld sein soll.

Ist $C$ ein zwei Punkte $P$ und $Q$ verbindender Gefällskurvenbogen (er ist dann auch Extremalbogen) und $\bar{C}$ ein beliebiger, ganz im Gefällskurvenfeld gelegener, $P$ und $Q$ verbindender „Vergleichsbogen", so gilt für die Integraldifferenz

$$\left\{\begin{aligned} \Delta J &= \int_{\bar{C}} \Phi(x, x')\,dt - \int_{C} \Phi(x, x')\,dt \\ &= \int_{\bar{C}} \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} x_i' \,dt - \int_{C} \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'} \,dx_i \\ &= \int_{\bar{C}} \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\right] x_i' \,dt = \int_{\bar{C}} \mathcal{E}(x, x', \xi)\,dt. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Ist demnach ein Extremalbogen in ein Gefällskurvenfeld einbettbar, so gelingt die Darstellung der für die Feststellung der Minimaleigenschaft fundamentalen Integraldifferenz (12) mittels der WEIERSTRASSschen $\mathcal{E}$-Funktion in einfachster Weise. Es ist daher von Wichtigkeit, dieses Einbettungsproblem für den $R_n$, $n > 2$, zu besprechen. Das Folgende gebe ungefähr ein Bild!

Es sei ein Extremalenfeld gegeben; durch jeden Punkt des betrachteten Bereiches des $R_n$ gehe eine bestimmte Extremale des Feldes. Weiter sei eine Hyperfläche $F_{n-1}$ mit der Gleichung $\varphi^0(x_1, \ldots, x_n) = 0$ gegeben, die jede Extremale des Feldes in genau einem Punkte trifft. Ist $x_i = x_i^0(y_1, \ldots, y_{n-1})$ eine Parameterdarstellung dieser $F_{n-1}$, so ist jede Extremale des Feldes

$$x_i = \varphi_i(x_1^0(y), \ldots, x_n^0(y);\ \xi_0^1(y)t, \ldots, \xi_0^n(y)t) \tag{13}$$

durch die Anfangslage $x_i = x_i^0(y)$, $x_i' = \xi_0^i(y)$ für $t = 0$, d. h. durch ihren Richtungsvektor im Schnittpunkte mit der $F_{n-1}$ bestimmt. Für $t = 0$ ergibt (13) die $F_{n-1}$. Wir bilden nun längs der Extremalbogen $\widehat{P_0P}$ und $\widehat{\overline{P}_0\overline{P}}$ (Fig. 4) die Integrale $\int \Phi(x, x')\,dt$ und sodann

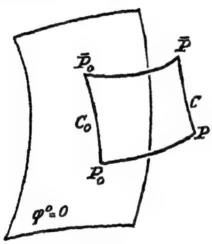

Fig. 4.

$$\Delta J = \int_{\overline{P}_0}^{\overline{P}} \Phi(x, x')\,dt - \int_{P_0}^{P} \Phi(x, x')\,dt. \tag{14}$$

In der $F_{n-1}(\varphi^0 = 0)$ verbinde der Bogen $C_0: y_j = y_j(\varepsilon)$, $(j = 1, \ldots, n-1)$ die Punkte $P_0(\varepsilon = 0)$ und $\overline{P}_0(\varepsilon = 1)$. Dabei sei das Feld, die Hyperfläche $F_{n-1}$ und die Kurve $C_0$ so gewählt, daß die Funktionen

$$x_i^0(y), \quad \xi_0^i(y), \quad y_j(\varepsilon)$$

zweimal stetig differenzierbar sind. Die Gesamtheit der von den Punkten der $C_0$ ausgehenden Feldextremalen bildet eine $F_2$, deren Gleichung man durch Substitution der $y_i = y_i(\varepsilon)$ in (13) in der Form $x_i = x_i(t, \varepsilon)$ gewinnt. Da die $\varphi_i(x^0, \xi_0 t)$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen ihrer Argumente sind, so gilt dasselbe für die $x_i(t, \varepsilon)$. Auf den die $C_0$ schneidenden und die $F_2$ bildenden Extremalen denken wir uns noch mittels $t = \alpha(\varepsilon)\tau$, wo $\alpha(\varepsilon)$ zweimal stetig differenzierbar ist, eine Parametertransformation so vorgenommen, daß für $t = 1$ (wir schreiben wieder $t$ statt $\tau$) $x_i(1, \varepsilon) = x_i$ ein in weitem Maße beliebiger, $P$ mit $\overline{P}$ verbindender Bogen $C$ der $F_2$ ist.

Bilden wir dann für den Extremalbogen $x_i = x_i(t, \varepsilon)$ mit konstantem $\varepsilon$

$$J(\varepsilon) = \int_0^1 \Phi(x, x')\,dt, \tag{14'}$$

so ist

$$\Delta J = J(1) - J(0). \tag{15}$$

Nun ist

$$(16)\quad J'(\varepsilon)=\int\limits_0^1\left[\frac{\partial\Phi(x,x')}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}+\frac{\partial\Phi(x,x')}{\partial x_i'}\frac{\partial x_i'}{\partial\varepsilon}\right]dt=\int\limits_0^1\varrho_i\frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}dt+\left[\xi_i\frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}\right]_0^1,$$

wo $\varrho_i$ der für die Extremale $\varepsilon$ verschwindende EULERsche Vektor und $\xi_i=\dfrac{\partial\Phi(x,x')}{\partial x_i'}$ ist. Also gilt

$$(17)\qquad J'(\varepsilon)=\left[\xi_i\frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}\right]_{t=1}-\left[\xi_i\frac{\partial x_i}{\partial\varepsilon}\right]_{t=0}.$$

Für $\Delta J=\int\limits_0^1 J'(\varepsilon)\,d\varepsilon$ ergibt dies

$$(18)\qquad \Delta J=\int\limits_C\xi_i\,dx_i-\int\limits_{C_0}\xi_i\,dx_i.$$

Für geschlossene Kurven $\overline{P}_0=P_0$, $\overline{P}=P$ verschwindet $\Delta J$, also gilt

$$(19)\qquad \int\limits_{C_0}\xi_i\,dx_i=\int\limits_C\xi_i\,dx_i.$$

Schneidet nun $\varphi^0(x_1,\ldots,x_n)=0$ die Extremalen des Feldes senkrecht (oder „transversal“, wie man es in der Variationsrechnung nennt), d. h. gilt für alle Richtungen $dx_i$ dieser $F_{n-1}$

$$(20)\qquad \xi_i\,dx_i=0,$$

so verschwindet das Integral links in (19), und wir erhalten für beliebige geschlossene Kurven

$$(21)\qquad \int\limits_C\xi_i\,dx_i=0.$$

Somit ist das Integral $\int\limits_{P_0}^{P}\xi_i\,dx_i$ vom Integrationswege unabhängig, also das Extremalenfeld ein Gefällskurvenfeld.

Wir sehen also, daß unter gewissen Annahmen über die Stetigkeit und Differenzierbarkeit die Existenz einer das Extremalenfeld senkrecht schneidenden $F_{n-1}$ auch hinreicht, damit dieses ein Gefällskurvenfeld ist.

## § 9. Zwei Folgerungen.

**A.** Es sei ein Gefällskurvenfeld gegeben und zwei die Extremalen dieses Feldes senkrecht schneidende $F_{n-1}$. Bezeichnet man als Länge eines Bogens $C_{P_0}^{P_1}$ das Integral $\int\limits_{P_0}^{P_1}\Phi(x,x')\,dt$, so gilt der Satz, daß *die von den beiden $F_{n-1}$ aus den Gefällskurven ausgeschnittenen Bogen die gleiche Länge haben.* Sind $C_1(P_1Q_1)$, $C_2(P_2Q_2)$ die aus zwei Gefällskurven ausgeschnittenen Bogen (Fig. 5) und verbindet in der einen $F_{n-1}$ die Kurve $C_3$ die Punkte $P_1$, $P_2$ und in der anderen $C_4$ die Punkte $Q_2, Q_1$, so gilt, wenn wir $J_k = \int\limits_{C_k} \Phi(x, x')\, dt$ setzen,

$$\Delta J = J_3 + J_2 + J_4 - J_1 = \int\limits_{C_3+C_2+C_4} \left[\frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\right] d x_i$$

$$= \int\limits_{C_3+C_4} \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'}\, d x_i = J_3 + J_4 .$$

Also ist $J_2 - J_1 = 0$, w. z. b. w.

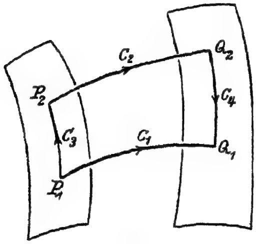


Fig. 5.

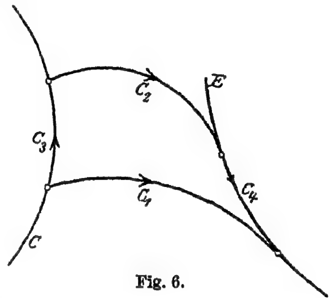


Fig. 6.

**B. Der Hüllkurvensatz.** Sei im $R_2$ ein Extremalenfeld gegeben, dessen Kurven von einer Kurve $C$ senkrecht geschnitten werden. Die einparametrige Schar der Extremalen habe eine Einhüllende $E$ (Fig. 6). Wir bilden wieder

$$\Delta J = J_3 + J_2 + J_4 - J_1 = \int\limits_{C_3+C_2+C_4} \left[\frac{\partial \Phi(x,x')}{\partial x_i'} - \frac{\partial \Phi(x, \xi)}{\partial x_i'}\right] d x_i = \int\limits_{C_3} \frac{\partial \Phi(x, x')}{\partial x_i'}\, d x_i = J_3,$$

da ja hier wegen $x_i' = \xi^i$ auch $\int\limits_{C_4} \mathcal{E}(x, x', \xi)\, dt = 0$ ist. Somit gilt

$$(1) \qquad J_2 + J_4 = J_1,$$

der sogenannte *Hüllkurvensatz*.

## § 10. Skizzierung des zweidimensionalen Variationsproblems.

Es sei im $R_n$ eine Funktion

$$(1) \qquad F(x, \eta)$$

der „$F_2$-Richtung" (Plückerscher Tensor zweiter Stufe)

$$(2) \qquad \eta^{ik} = \varrho^i \sigma^k - \varrho^k \sigma^i$$

im Punkt $x_i$ des $R_n$ gegeben. Ist dann

$$(3) \qquad x_i = x_i(u, v)$$

eine zweidimensionale Parameterfläche (wieder sind die Parameter wesentlich!), so ist jedem ihrer Punkte durch

$$(4) \qquad \eta^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

vermittels (1) ein Wert zugeordnet. Ist dann in der $F_2$ (3) durch eine singularitätenfreie geschlossene Kurve $C$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet $G$ abgegrenzt, so ist diesem durch das Integral

$$J = \int\limits_G F(x, \eta)\, du\, dv \tag{5}$$

ein bestimmter Wert zugeordnet. Führen wir in $F(x, \eta)$ statt $\eta^{ik}$ den wegen $\eta^{ik} = -\eta^{ki}$ gleichen Wert $\frac{1}{2}(\eta^{ik} - \eta^{ki})$ ein, so gilt für die so umgeformte Funktion

$$\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ik}} = -\frac{\partial F(x, \eta)}{\partial \eta^{ki}}. \tag{6}$$

Ist $F(x, \eta)$ in $\eta^{ik}$ von erster Ordnung positiv homogen, so bleibt für Transformationen der Parameter

$$u = u(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = v(\bar{u}, \bar{v})$$

mit positiver Determinante $\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}$ der Integralwert (5) unverändert. Dies folgt aus

$$\bar{\eta}^{ik} = \eta^{ik} \frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}. \tag{7}$$

Analog wie beim Variationsproblem der Kurvenintegrale legen wir uns die Frage vor, unter welchen Voraussetzungen $G$ ein Minimum für das Integral (5) liefert, im Vergleich zu allen anderen von der Randkurve $C$ (von $G$) berandeten Gebieten.

Wir wollen ganz analog wie beim eindimensionalen Problem zuerst *notwendige* Bedingungen ableiten, wodurch wir in die Lage kommen, gewisse Klassen von Vergleichs-$F_2$ allein zu berucksichtigen.

Wir betrachten eine einparametrige Flächenschar

$$x_i = x_i(u, v, \varepsilon), \quad x_i(u, v, 0) = x_i(u, v), \tag{8}$$

deren Einzelflächen alle durch $C$ berandet seien[1]); $\varepsilon = 0$ entspricht dem Gebiete $G$. In den Punkten von $C$ gilt dann

$$\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon} = 0. \tag{8'}$$

Setzen wir $x_i(u, v, \varepsilon)$ statt $x_i(u, v)$ in das Integral (5) ein, so wird dieses eine Funktion von $\varepsilon$, die mit $J(\varepsilon)$ bezeichnet sei. Soll $G(\varepsilon = 0)$ ein Minimum für das Integral liefern, so ist $J'(0)$ notwendig gleich Null. Bezeichnet $G(\varepsilon)$ das

1) Ist $u = u(t)$, $v = v(t)$ eine Parameterdarstellung von $C$, so soll also die Raumkurve $x_i = x_i(u(t), v(t), \varepsilon)$ von $\varepsilon$ unabhängig sein. Ist $y_i(u(t), v(t)) = 0$, so kann man $x_i(u, v, \varepsilon) = x_i(u, v) + \varepsilon y_i(u, v)$ setzen.

auf der Parameterfläche $\varepsilon$ durch $C$ begrenzte Gebiet, so gilt bei Berücksichtigung von (6) und (8′)

$$(9)\quad J'(\varepsilon)=\int\limits_{G(\varepsilon)}\!\!\int\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial \eta^{jk}}\left(\frac{\partial^2 x_j}{\partial\varepsilon\,\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}+\frac{\partial x_j}{\partial u}\frac{\partial^2 x_k}{\partial\varepsilon\,\partial v}-\frac{\partial^2 x_j}{\partial\varepsilon\,\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial u}-\frac{\partial x_j}{\partial v}\frac{\partial^2 x_k}{\partial\varepsilon\,\partial u}\right)\right]du\,dv$$

$$=\int\limits_{G(\varepsilon)}\!\!\int\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}-2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}}\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)+2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)\right]\frac{\partial x_i}{\partial \varepsilon}\,du\,dv.$$

Man zeigt nun genau wie früher, daß für jede $F_2$ mit der Parameterdarstellung $x_i = x_i(u, v)$

$$(10)\qquad \varrho_i=\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial x_i}-2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial \eta^{ik}}\frac{\partial x_k}{\partial v}\right)+2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial \eta^{ik}}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right)$$

ein kovarianter Vektor ist, den wir wieder den *Eulerschen Vektor* des Variationsproblems nennen wollen. Wir können $\varrho_i$ auch schreiben

$$(10')\quad \varrho_i=\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial x_i}-2\frac{\partial^2 F(x,\eta)}{\partial x_l\,\partial \eta^{ik}}\eta^{lk}-2\frac{\partial^2 F(x,\eta)}{\partial \eta^{ik}\,\partial \eta^{pq}}\left[\frac{\partial \eta^{pq}}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}-\frac{\partial \eta^{pq}}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial u}\right].$$

Ist ein $F_2$-Feld mit der Eigenschaft gegeben, daß es durch jeden Punkt des betrachteten Raumstückes eine bestimmte $F_2$ gibt, so kann man $\eta^{pq} = \eta^{pq}(x_1, \ldots, x_n)$ als Funktion der Punkte dieses Raumstückes auffassen; für ein solches Feld tritt an Stelle von (10′)

$$(10'')\qquad \varrho_i=\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial x_i}-2\frac{\partial^2 F(x,\eta)}{\partial x_l\,\partial \eta^{ik}}\eta^{lk}-2\frac{\partial^2 F(x,\eta)}{\partial \eta^{ik}\,\partial \eta^{pq}}\frac{\partial \eta^{pq}}{\partial x_l}\eta^{lk}.$$

Das System der partiellen Differentialgleichungen $\varrho_i = 0$ möge wieder das System der *Eulerschen Differentialgleichungen* und $F_2$-Gebiete, fur die $\varrho_i$ verschwindet, *Extremalgebiete des Variationsproblems* genannt werden. Werden nur solche $F_2$-Mannigfaltigkeiten betrachtet, für die $\varrho_i$ stetig ist, so folgt wie früher, daß alle Gebiete, für die (5) ein Minimum wird, Extremalgebiete sein müssen. Setzen wir $G(x,\eta) = \frac{\partial F(x,\eta)}{\partial \eta^{ik}}\eta^{ik}$, so gilt für jede $F_2$ (3)

$$(11)\qquad \frac{\partial(F-G)}{\partial u}=\varrho_i\frac{\partial x_i}{\partial u},\quad \frac{\partial(F-G)}{\partial v}=\varrho_i\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

oder

$$(11')\qquad d(F-G)=\varrho_i\,dx_i.$$

Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u}+\frac{\partial F}{\partial \eta^{pq}}\frac{\partial \eta^{pq}}{\partial u},\quad \frac{\partial G}{\partial u}=\eta^{pq}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{pq}}\right)+\frac{\partial F}{\partial \eta^{pq}}\frac{\partial \eta^{pq}}{\partial u}$$

ist nämlich

$$(12)\qquad \frac{\partial(F-G)}{\partial u}=\frac{\partial F}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}}\right)\cdot\left(\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v}-\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right)$$

$$=\left[\frac{\partial F}{\partial x_i}-2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}}\right)\frac{\partial x_k}{\partial v}\right]\frac{\partial x_i}{\partial u};$$

andrerseits kann man wegen (10)

$$(10''') \qquad \varrho_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} - 2\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}}\right)\cdot\frac{\partial x_k}{\partial v} + 2\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}}\right)\cdot\frac{\partial x_k}{\partial u}$$

schreiben, so daß

$$(12') \qquad \frac{\partial(F-G)}{\partial u} = \varrho_i\,\frac{\partial x_i}{\partial u} - 2\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial \eta^{ik}}\right)\frac{\partial x_i}{\partial u}\,\frac{\partial x_k}{\partial u} = \varrho_i\,\frac{\partial x_i}{\partial u},$$

wird, w. z. b. w.

Ist insbesondere $F(x, \eta)$ in $\eta^{ik}$ *von kter Ordnung positiv homogen*, so tritt an Stelle von (11′)

$$(13) \qquad (1-k)\,dF = \varrho_i\,dx_i$$

für jede $F_2$ (3).

Ist $k = 1$, so ist $\varrho_i\,dx_i = 0$, d. h. *der Eulersche Vektor einer jeden* $F_2$ (3) *ist ein Normalvektor derselben.*

Ist $k \neq 1$, so ist $F(x, \eta)$ längs einer Extremalenfläche ($\varrho_i = 0$) konstant, was auch für $F_2$-Mannigfaltigkeiten gilt, für die $\varrho_i$ ein Normalvektor ist. Umgekehrt folgt aus der Konstanz von $F(x, \eta)$ längs einer $F_2$, daß der Eulersche Vektor ein Normalvektor der $F_2$ ist.

Durch eine Parametertransformation (7) läßt sich im homogenen Fall für eine $F_2$ stets erreichen, daß $|F(x, \eta)| = 1$ ist, wenn $F(x, \eta) \neq 0$ ist. Seien $\bar u, \bar v$ die so bestimmten Parameter, so gilt — die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(uv)}{\partial(\bar u \bar v)} > 0$ vorausgesetzt —

$$(14) \qquad 1 = |F(x, \bar\eta)| = |F(x, \eta)|\left|\frac{\partial(uv)}{\partial(\bar u \bar v)}\right|^k = |f(u, v)|\left(\frac{\partial(uv)}{\partial(\bar u \bar v)}\right)^k,$$

wo $F(x, \eta) = f(u, v)$ für die vorliegende $F_2$ sei. Wir haben nur

$$(14') \qquad \frac{\partial(\bar u \bar v)}{\partial(uv)} = \sqrt[k]{|f(u, v)|}$$

zu erfüllen, d. h. eine Lösung $\bar u$, $\bar v$ der partiellen Differentialgleichung (14′) aufzusuchen. Setzt man zu diesem Zwecke $\bar v = v$, so wird (14′) zu

$$(14'') \qquad \frac{\partial \bar u}{\partial u} = \sqrt[k]{|f(u, v)|}, \quad \text{also ist} \quad \bar u = \int^{u} \sqrt[k]{|f(u, v)|}\,du + g(v).$$

Es gilt ein zu § 3, E völlig analoger Satz, der auch ebenso bewiesen wird.

Das identische Verschwinden des Vektors $\varrho_i$ besagt, daß der Wert des Integrals (5) nicht mehr vom Gebiete $G$, sondern allein von der Randkurve $C$ von $G$ abhängt. (Dabei ist noch vorausgesetzt, daß im $R_n$ je zwei $F_2$-Gebiete mit gemeinsamem Rand $C$ in eine einparametrige Schar solcher Gebiete einbettbar sind.) Das kann aber nur für die spezielle Form

$$(15) \qquad F(x, \eta) = A_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\,\eta^{ik}, \quad A_{ik} = -A_{ki}$$

eintreten[1]); es wird dann

$$\varrho_j = \left[\frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_k}\right]\eta^{ik}. \tag{15'}$$

Soll also $\varrho_j$ identisch verschwinden, so ist notwendig und hinreichend, daß in jedem Punkt des $R_n$

$$\pi_{ikj} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{kj}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ji}}{\partial x_k} = 0 \tag{16}$$

gilt. Dabei ist $\pi_{ikj}$ mit $A_{ik}$ alternierend und ein kovarianter Tensor, wenn $A_{ik}$ ein solcher ist.

Wir stellen uns nun analog wie in § 8 die Aufgabe, den schiefsymmetrischen Tensor

$$\xi^{ik} = -\xi^{ki} \tag{17}$$

so zu bestimmen, daß

$$A_{ik} = \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik}} \tag{18}$$

dem System (16) genügt, d. h. daß $\int\limits_G \frac{\partial F(x, \xi)}{\partial \eta^{ik}}\eta^{ik}du\,dv$ nicht vom Gebiet $G$, sondern nur von der Randkurve $C$ von $G$ abhänge. Dabei sei $F(x, \eta)$ in $\eta$ von erster Ordnung positiv homogen. Setzen wir (18) in (16) ein, so führt dies auf ein System partieller Differentialgleichungen erster Ordnung für $\xi^{ik}$:

$$\begin{cases} \pi_{ikj} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^{ik}\partial x_j} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^{ik}\partial \eta^{pq}}\dfrac{\partial \xi^{pq}}{\partial x_j} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^{kj}\partial x_i} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^{kj}\partial \eta^{pq}}\dfrac{\partial \xi^{pq}}{\partial x_i} \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^{ji}\partial x_k} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial \eta^{ji}\partial \eta^{pq}}\dfrac{\partial \xi^{pq}}{\partial x_k} = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Wir denken uns nun eine Lösung $\xi^{ik}(x_1, \ldots, x_n)$ von (19) gefunden, die die besondere Eigenschaft hat, daß die $\xi^{ik}$ $F_2$-Elemente sind und sich weiter zu $F_2$-Mannigfaltigkeiten vereinigen lassen. Dann muß $\xi^{ik}$ ein Plückerscher Tensor

$$\xi^{ik} = \varrho^i\sigma^k - \varrho^k\sigma^i, \tag{19'}$$

und außerdem das System $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\varrho^i = 0$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\sigma^i = 0$ vollständig sein. Dadurch ist im $R_n$ ein „Gefällsflächenfeld“ gegeben. Ist dann für eine Gefällsfläche $x_i(u, v)$

$$\eta^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} = \alpha(u, v)\,\xi^{ik}, \tag{20}$$

1) Aus $T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki})$ folgt für den alternierenden Tensor $\eta^{ik}$

$$T_{ik}\eta^{ik} = \tfrac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki})\eta^{ik}.$$

Man kann somit stets annehmen, daß die Koeffizienten $A_{ik}$ einer in $\eta^{ik}$ linearen Form der Relation $A_{ik} = -A_{ki}$ genügen.

so kann man durch geeignete Parametertransformation erreichen, daß $\alpha = 1$, also

$$\xi^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v} \tag{21}$$

wird. Wir bilden nun $\pi_{ikj}\xi^{ik}$. Wegen

$$\frac{\partial^2 F(x,\xi)}{\partial \eta^{ik}\partial x_j}\xi^{ik} = \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial^2 F(x,\xi)}{\partial \eta^{ik}\partial \eta^{pq}}\xi^{ik} = 0 \tag{22}$$

erhalten wir

$$\pi_{ikj}\xi^{ik} = \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x_j} + 2\frac{\partial^2 F(x,\xi)}{\partial \eta^{kj}\partial x_i}\xi^{ik} + 2\frac{\partial^2 F(x,\xi)}{\partial \eta^{kj}\partial \eta^{pq}}\frac{\partial \xi^{pq}}{\partial x_i}\xi^{ik} = 0, \tag{23}$$

d. h. nach (10″), daß $\varrho_j = 0$ ist. *Die Gefällsflächen eines Feldes sind Extremalflächen.*

Es sei nun im $R_3$ ein Extremalflächenfeld gegeben, d. h., es soll durch jeden Punkt genau eine (reguläre) Extremalfläche verlaufen, deren Tangentenvektorraum die Plückerschen Koordinaten $\xi^{ik}$ hat. Die Relation (23) zerfällt im $R_3$ in

$$\pi_{231}\xi^{23} = 0, \quad \pi_{312}\xi^{31} = 0, \quad \pi_{123}\xi^{12} = 0. \tag{24}$$

Da die Matrix des Tangentenvektorraumes

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_3}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_3}{\partial v} \end{matrix} \right\| \tag{25}$$

den Rang zwei hat (weil die entsprechende Extremalfläche in jedem Punkte regulär ist), so kann nicht $\xi^{12} = \xi^{23} = \xi^{31} = 0$, sondern es muß $\pi_{123} = \pi_{231} = \pi_{312} = 0$ oder $\pi_{ijk} = 0$ sein. Im $R_3$ gilt daher:

*Setzt man in das über ein zweidimensionales Gebiet $G$ des $R_3$ erstreckte Integral*

$$\int_G \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \eta^{ik}}\eta^{ik}\,du\,dv$$

*für $\xi^{ik}$ die Plückerschen Koordinaten*

$$\xi^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_k}{\partial v} - \frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_i}{\partial v}$$

*eines Feldes von Extremalflächen, so wird das Integral eine Funktion der Randkurve $C$ von $G$.* Dies ist der Inhalt des *Hilbertschen Unabhängigkeitssatzes* für die Variation zweifacher Integrale im $R_3$.

Sei jetzt $C$ die Randkurve eines Extremalgebietes $G$, das einem Gefällsfelde angehöre, und $G^*$ ein zweites von $C$ berandetes und ganz im Felde gelegenes Vergleichsgebiet. Wir bilden dann die Integraldifferenz

$$(26)\quad \begin{cases} \Delta J = \int\limits_{G^*} F(x,\eta)\,du\,dv - \int\limits_{G} F(x,\eta)\,du\,dv \\ \quad = \int\limits_{G^*} F(x,\eta)\,du\,dv - \int\limits_{G} \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \eta^{ik}}\eta^{ik}\,du\,dv \\ \quad = \int\limits_{G^*} \left[\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial \eta^{ik}} - \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \eta^{ik}}\right]\eta^{ik}\,du\,dv. \end{cases}$$

Führen wir die WEIERSTRASSsche $\mathcal{E}$-Funktion ein

$$(27)\qquad \mathcal{E}(x,\eta,\xi) = \left[\frac{\partial F(x,\eta)}{\partial \eta^{ik}} - \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial \eta^{ik}}\right]\eta^{ik},$$

so gilt wieder

$$(28)\qquad \Delta J = \int\limits_{G^*} \mathcal{E}(x,\eta,\xi)\,du\,dv.$$

Als Beispiel sei das folgende geometrisch wichtige Problem der zweidimensionalen Minimalflächen des RIEMANNschen $R_n$ erwähnt. Wir setzen im RIEMANNschen $R_n$ mit dem Maßtensor $g_{ik}$

$$(29)\qquad F(x,\eta) = \tfrac{1}{2}\sqrt{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\eta^{ij}\eta^{kh}}.$$

$F(x,\eta)$ ist in $\eta^{ik}$ von erster Ordnung positiv homogen. Das entsprechende Variationsproblem fragt nach der von einer geschlossenen Kurve $C$ berandeten zweidimensionalen Fläche geringsten Flächeninhaltes. Für

$$(30)\qquad \eta^{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial x_j}{\partial u}$$

gilt in der Tat

$$(31)\qquad (F(x,\eta))^2 = (g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial x_j}{\partial v}\frac{\partial x_k}{\partial u}\frac{\partial x_h}{\partial v} = eg - f^2,$$

wo $e$, $f$, $g$ die Koeffizienten der ersten Grundform (der Maßtensor) der Fläche sind. Also ist

$$(32)\qquad \int\limits_{G} F(x,\eta)\,du\,dv = \int\limits_{G}\sqrt{eg-f^2}\,du\,dv$$

gleich dem Inhalt des Integrationsgebietes $G$. Wir berechnen die entsprechende $\mathcal{E}$-Funktion und erhalten

$$(33)\quad 2\mathcal{E}(x,\eta,\xi) = \frac{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\eta^{ij}\eta^{kh}}{\sqrt{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\eta^{ij}\eta^{kh}}} - \frac{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\xi^{ij}\eta^{kh}}{\sqrt{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\xi^{ij}\xi^{kh}}}$$

$$= \frac{\sqrt{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\eta^{ij}\eta^{kh}}\sqrt{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\xi^{ij}\xi^{kh}} - (g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\xi^{ij}\eta^{kh}}{\sqrt{(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,\xi^{ij}\xi^{kh}}}.$$

An diesem etwas umfangreichen Ausdruck interessiert uns nur die Einsicht, *daß* $\mathcal{E}(x,\eta,\xi)\geqq 0$ *und nur für* $\eta^{ij}=\alpha\,\xi^{ij}$ *gleich Null wird.* Der „Flächentensor" $g_{ik}g_{jh}-g_{ih}g_{jk}$ ist ja das Komponentensystem der *positiv definiten quadratischen Form* $(g_{ik}g_{jh}-g_{ih}g_{jk})\tau^{ij}\tau^{kh}$ des allgemeinsten alternierenden Tensors $\tau^{ij}$.

## § 11. Anwendung auf den Riemannschen $R_n$.

Die Extremalen des Variationsproblems

$$\int \sqrt{g_{ik}\,x_i'\,x_k'}\,dt \tag{1}$$

heißen die *geodätischen Linien* oder kurz *Geodätischen* des RIEMANNschen $R_n$. Wir berechnen für eine Kurve $C$ mit der Parameterdarstellung $x_i=x_i(t)$ den EULERschen Vektor $\varrho_i$. Aus

$$F(x,x')=\sqrt{g_{ik}\,x_i'\,x_k'} \tag{2}$$

folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}=\frac{1}{2F}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha}x_i'\,x_k',\quad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha'}=\frac{1}{F}g_{i\alpha}\,x_i'. \tag{3}$$

Nun ist

$$\frac{x_i'}{F}={}_{(1)}\xi^i \tag{4}$$

wegen $g_{ik}\,{}_{(1)}\xi^i\,{}_{(1)}\xi^k=1$ der normierte Tangentenvektor, also ist $\dfrac{\partial F}{\partial x_\alpha'}={}_{(1)}\xi_\alpha$ und

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\alpha'}\right)=\frac{d}{dt}\left({}_{(1)}\xi_\alpha\right)=\frac{d}{ds}\left({}_{(1)}\xi_\alpha\right)\frac{ds}{dt}=\left[\begin{Bmatrix}\alpha i\\ l\end{Bmatrix}{}_{(1)}\xi_l\,{}_{(1)}\xi^i+\frac{{}_{(2)}\xi_\alpha}{\varrho_1}\right]\frac{ds}{dt}, \tag{5}$$

wo $s$ die Bogenlänge der Kurve $x_i=x_i(t)$ bedeutet. Da ferner $x_i'=\dfrac{dx_i}{dt}={}_{(1)}\xi^i\dfrac{ds}{dt}$ ist, so können wir statt (3)

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha}\,{}_{(1)}\xi^i\,{}_{(1)}\xi^k\frac{ds}{dt} \tag{6}$$

schreiben. Nun ist $\quad \begin{Bmatrix}\alpha i\\ l\end{Bmatrix}{}_{(1)}\xi_l=\begin{bmatrix}\alpha i\\ k\end{bmatrix}g^{kl}\,{}_{(1)}\xi_l=\begin{bmatrix}\alpha i\\ k\end{bmatrix}{}_{(1)}\xi^k,$

also $\quad \begin{Bmatrix}\alpha i\\ l\end{Bmatrix}{}_{(1)}\xi_l\,{}_{(1)}\xi^i=\begin{bmatrix}\alpha i\\ k\end{bmatrix}{}_{(1)}\xi^i\,{}_{(1)}\xi^k=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_\alpha}\,{}_{(1)}\xi^i\,{}_{(1)}\xi^k.$

Wir haben demnach

$$\varrho_\alpha=\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_\alpha'}\right)=-\frac{{}_{(2)}\xi_\alpha}{\varrho_1}\frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

Unsere Resultate betreffs der Extremalen lauten daher:

*Für die Geodätischen des $R_n$ ist das Verschwinden der ersten Krümmung notwendig und hinreichend.*

*Für die Geodätischen einer Hyperfläche $F_l$ des $R_n$ ist notwendig und hinreichend, daß die erste Normale senkrecht auf der $F_l$ steht, sofern $\frac{1}{\varrho_1} \neq 0$ ist. Jede in der $F_l$ liegende Geodätische des $R_n \left(\frac{1}{\varrho_1} = 0\right)$ ist eine Geodätische der $F_l$.*

Aus
$$\frac{{}^{(2)}\xi^i}{\varrho_1} = \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ {p\,q \atop i} \right\} \frac{d x_p}{ds} \frac{d x_q}{ds}$$
folgt, daß
$$\frac{\mathfrak{d} x_i'}{\mathfrak{d} s} = \frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ {p\,q \atop i} \right\} \frac{d x_p}{ds} \frac{d x_q}{ds} = 0 \tag{8}$$

das (auf die Bogenlänge als Parameter bezogene) *System der Eulerschen Differentialgleichungen* in der Normalform ist. Wie wir wissen, bestimmt das System (8) den Parameter $s$ bis auf eine lineare Transformation $\bar{s} = a s + b$. Ein Integral des Systems (8) kennen wir, nämlich $g_{ik} x_i' x_k'$. Wegen (8) und $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} s} g_{ik} = 0$ ergibt sich das auch direkt:

$$\frac{d}{ds}(g_{ik} x_i' x_k') = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} s}(g_{ik} x_i' x_k') = 0, \tag{9}$$

also $g_{ik} x_i' x_k' =$ konst.

Da es keine Nullkurven gibt $(g_{ik} \lambda^i \lambda^k \neq 0)$, ist (8) äquivalent mit

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_i'}\right) = 0$$

für $F = g_{ik} x_i' x_k'$, eine Bemerkung, die bei der Berechnung der Christoffelklammern oft nützlich ist.

Als Aufgabe berechne man die Weierstrasssche $\mathcal{E}$-Funktion und zeige, daß sie wesentlich positiv ist.

Die *Riemannschen Normalkoordinaten* eines Punktes $P_0$ sind Koordinaten, in denen die Gleichungen der Geodätischen durch $P_0$ (*Zentrum* oder *Ursprung* des Koordinatensystems) in der Bogenlänge $s$ linear sind, also die Form

$$x_i = \xi^i s \tag{10}$$

mit konstanten $\xi^i$ haben. Notwendig und hinreichend für ein Riemannsches Koordinatensystem mit dem Ursprung $P_0$ ist das Bestehen der Relationen (6, 10'), d. h.

$$g_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\, x_k = g_{ik}(0, \ldots, 0)\, x_k. \tag{11}$$

Durch eine Transformation $\bar{x}_i = a_{ik} x_k$ (eine solche zerstört den Charakter der Normalkoordinaten nicht) kann man erreichen, daß $\bar{g}_{ik}(0, \ldots, 0) = \delta_{ik}$ wird. Charakteristisch für die Riemannschen Normalkoordinaten mit $g_{ik}(0, \ldots, 0) = \delta_{ik}$ ist

$$g_{ik} x_k = x_i. \tag{12}$$

Aus (10) folgt für die Geodätischen durch das Zentrum $\frac{d^2 x_i}{ds^2} = 0$; also ist in $P_0$, wenn wir $\frac{d x_i}{d s} = \xi^i$ setzen, für jede Geodätische (für jede Richtung $\xi^i$)

$$(13) \qquad \left\{ {p\,q \atop i} \right\} \xi^p \xi^q = 0;$$

in $P_0$ muß also $\left\{ {p\,q \atop i} \right\} = 0$, also auch $\left[ {p\,q \atop i} \right] = 0$ und somit auch

$$(14) \qquad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = 0$$

gelten. *Verschwinden in einem Punkte $P_0$ die Ableitungen des Maßtensors $g_{ik}$, so nennen wir das bezügliche Koordinatensystem in $P_0$ geodätisch.* Dann bedeutet (14):

*Die Normalkoordinaten mit dem Ursprung $P_0$ sind in $P_0$ geodätisch.*

Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß in allgemeinen (nicht Riemannschen) Räumen die Extremale $\overset{\frown}{PQ}$, die von $P$ nach $Q$ im Sinn wachsenden Parameters orientiert ist, von der Extremalen $\overset{\frown}{QP}$ *verschieden* ist; es muß die eine nicht existieren, auch wenn die andere vorhanden ist.

Für die Geodätischen des Riemannschen Raumes besteht aber kein Unterschied der beiden Extremalen $\overset{\frown}{PQ}$ und $\overset{\frown}{QP}$, denn ist $x_i = \varphi_i(s)$ eine Extremale, so gilt dasselbe von $x_i = \varphi_i(-s)$.

# VI. Der Riemannsche $R_n$, Fortsetzung.

## § 1. Die Parallelverschiebung von Levi-Civita.

Genügt ein längs einer stetig differenzierbaren Kurve $C$ mit der Parameterdarstellung $x_i = x_i(t)$ definierter Tensor

$$x_i(t),\ T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}(t) \tag{1}$$

dem System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\mathfrak{d}\, T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot} = 0, \tag{2}$$

so wollen wir von ihm in der von Levi-Civita eingeführten Redeweise als von einem längs der Kurve $C$ *parallel verschobenen Tensor* sprechen. Markieren wir auf $C$ einen Punkt $P_0(t = t_0)$, so erhalten wir den Tensor (1) durch Integration des Systems (2) bei vorgegebener Anfangslage $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}(t_0)$ in eindeutiger Weise. Ein parallel verschobener Tensor ist also durch eine vorgegebene Anfangslage in einem Punkte $P_0$ der Kurve $C$, längs der er parallel verschoben wird, eindeutig bestimmt.

Ein Beispiel eines längs jeder Kurve parallel verschobenen Tensors bietet der Maßtensor $g^{ik}, g_{ik}, \delta^i_k$ des Riemannschen $R_n$. Ein weiteres Beispiel ist ein längs der Kurve $C$ definierter konstanter Skalar.

Es gelten folgende Sätze:

a) *Die Summe zweier gleichartiger, längs derselben Kurve $C$ parallel verschobener Tensoren ist ein längs $C$ parallel verschobener Tensor.* Dieser Satz folgt aus $\mathfrak{d}(U^{\cdot\cdot}_{\cdot} + V^{\cdot\cdot}_{\cdot}) = \mathfrak{d}(U^{\cdot\cdot}_{\cdot}) + \mathfrak{d}(V^{\cdot\cdot}_{\cdot})$.

b) *Das Produkt zweier beliebiger, längs derselben Kurve $C$ parallel verschobener Tensoren ist ein längs $C$ parallel verschobener Tensor.* Dies folgt aus $\mathfrak{d}(UV) = U\mathfrak{d}(V) + V\mathfrak{d}(U)$.

In den Sätzen a) und b) kann statt „zweier" natürlich „mehrerer" geschrieben werden. Sind $\mu^i$ und $\nu^i$ zwei längs $C$ parallel verschobene Vektoren, so ist

$$\mathfrak{d}(g_{ik}\mu^i\nu^k) = d(g_{ik}\mu^i\nu^k) = 0 \tag{3}$$

längs $C$, somit $g_{ik}\mu^i\nu^k = \text{konst.}$ Also: *Längen und Winkel zweier Vektoren bleiben bei Parallelverschiebung längs derselben Kurve ungeändert.*

Verschiebt man ein normiertes $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ längs $C$ parallel von $P_0$ nach $P$ (d. h. integriert man das System $\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\mu_i = 0$ mit der Anfangslage ${}_{(\alpha)}\mu_i(t_0)$, wo ${}_{(\alpha)}\mu_i(t_0)$ in $P_0(t = t_0)$ ein normiertes $n$-Bein ist), so erhält man in jedem Punkte $t$ von $C$ ein normiertes $n$-Bein.

Ist $T^{k\cdots}_{ij\cdots}$ ein längs $C$ parallel verschobener Tensor und

$$T^{k\cdots}_{ij\cdots} = {}_{(\alpha\beta\ldots\gamma\ldots)}T\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\beta)}\mu_j\ldots{}_{(\gamma)}\mu^k\ldots \tag{4}$$

seine Darstellung mittels des obigen normierten $n$-Beins in $P_0$, so gilt (4) längs der ganzen Kurve $C$ mit konstanten

$$ {}_{(\alpha\beta\ldots\gamma\ldots)}T = T^{k\cdots}_{ij\cdots}\,{}_{(\alpha)}\mu^i\,{}_{(\beta)}\mu^j\ldots{}_{(\gamma)}\mu_k\ldots \tag{5}$$

Aus dieser Bemerkung folgt, daß die Parallelverschiebung der Tensoren im $R_n$ auf die von Vektoren zurückgeführt werden kann. Fur Vektoren ist (2) äquivalent mit

$$d\lambda^i = -\begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix} \lambda^p dx_q \tag{6}$$

bzw.

$$d\lambda_i = \begin{Bmatrix} i\,q \\ p \end{Bmatrix} \lambda_p dx_q. \tag{6'}$$

Die Gleichungen (6) und (6′) sind wegen $\mathfrak{d}\lambda^i = g^{ik}\mathfrak{d}\lambda_k$ äquivalent. Für den Tangentenvektor ${}_{(1)}\xi^i$ einer Kurve $C$ folgt aus

$$\mathfrak{d}\,{}_{(1)}\xi^i = \frac{{}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1} ds, \tag{7}$$

*daß ${}_{(1)}\xi^i$ für eine Geodätische und nur für eine solche ein (längs $C$) parallel verschobener Vektor ist.* Denn für eine Geodätische ist ja $\frac{1}{\varrho_1} = 0$ als notwendig und hinreichend erkannt worden (V, § 11).

Im allgemeinen hängt die Endlage eines von $P_0$ nach $P$ längs des Bogens $C^P_{P_0}$ parallel verschobenen Tensors außer von der Anfangslage in $P_0$ noch vom Bogen $C^P_{P_0}$ ab, wie ja z. B. aus (6) ersichtlich ist. Die Komponenten in der Endlage $P$ sind Funktionen der Anfangslage und des $P_0$ mit $P$ verbindenden Bogens. Wir wollen nun annehmen, es gebe einen Vektor

$$\lambda^i = \lambda^i(x_1, \ldots, x_n), \tag{8}$$

der den Gleichungen (6) genügt, der also ein längs jeder Kurve $C$ parallel verschobener Vektor ist. Seine Komponenten sind dann vom Bogen $C^P_{P_0}$, über den parallel verschoben wird, unabhängig. Aus (6) folgt dann

$$\frac{\partial \lambda^i}{\partial x_q} \equiv -\begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix} \lambda^p \tag{9}$$

und weiter

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left[\begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix} \lambda^p\right] \equiv \frac{\partial}{\partial x_q}\left[\begin{Bmatrix} p\,r \\ i \end{Bmatrix} \lambda^p\right], \tag{10}$$

also

(10′) $$\frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix}\lambda^p - \begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} t\,r \\ p \end{Bmatrix}\lambda^t \equiv \frac{\partial}{\partial x_q}\begin{Bmatrix} p\,r \\ i \end{Bmatrix}\lambda^p - \begin{Bmatrix} p\,r \\ i \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} t\,q \\ p \end{Bmatrix}\lambda^t$$

und endlich

(11) $$0 \equiv R^i_{.trq}\lambda^t,$$

wo

(12) $$R^i_{.trq} = \frac{\partial}{\partial x_r}\begin{Bmatrix} t\,q \\ i \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_q}\begin{Bmatrix} t\,r \\ i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t\,q \\ p \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p\,r \\ i \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} t\,r \\ p \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix}$$

(wie sofort gezeigt wird) ein Tensor der angeschriebenen Art ist, der als *Krümmungstensor des Riemannschen* $R_n$ bezeichnet wird.

Für den eindeutig (d. h. unabhängig vom Bogen $C^P_{P_0}$, über den „parallel“ verschoben wird) parallel verschobenen Vektor (8) ist (11), falls $R^i_{.trq}$ nicht identisch verschwindet, ein System von Bedingungsgleichungen. Die Vektoren $\lambda^t$, die diesen genügen, bilden in jedem Punkte $P$ des $R_n$ einen $n-\varrho$ dimensionalen Vektorraum, wenn $\varrho$ der Rang des Systems (11) ist. Falls eindeutig parallel verschobene Raumvektoren (8) existieren, so müssen sie diesem Vektorraum angehören. Durch Differentiation der Identitäten (11) nach $x_\alpha$ erhalten wir

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha}(R^i_{\,tra})\,\lambda^t - \begin{Bmatrix} p\,\alpha \\ t \end{Bmatrix} R^i_{.trq}\lambda^p$$

oder[1])

(13) $$0 \equiv \left[\frac{\partial}{\partial x_\alpha}(R^i_{\,trq}) - \begin{Bmatrix} t\,\alpha \\ p \end{Bmatrix} R^i_{\,prq}\right]\lambda^t.$$

Wir sehen also, daß der eindeutig parallel verschobene Vektor $\lambda^i$ neben (11) auch dem System (13) genügen muß, und ebenso einem weiteren System, zu dem wir durch Differentiation von (13) gelangen usw., bis wir auf ein System stoßen, dessen „Erweiterung“ keine neuen Bedingungsgleichungen mehr für $\lambda^i$ liefert.

Ist $r$ der Rang des Systems *aller auf diese Weise gefundenen Bedingungsgleichungen für* $\lambda^i$ (die alle in $\lambda^i$ homogen linear sind), so ist dadurch in jedem Punkte des $R_n$ ein $n-r$ dimensionaler Vektorraum definiert, der also alle Vektoren enthält, die diesen Bedingungsgleichungen genügen. Dann kann man aber zeigen, daß es zu jeder Anfangslage

(14) $$x_i,\ \lambda^i,$$

die einem Vektor eines dieser Vektorräume (des Vektorraumes in $x_1, \ldots, x_n$) entspricht, einen eindeutig parallel verschobenen Vektor $\lambda^i$ gibt, der im Punkte $x_i$ die Anfangslage (14) annimmt. Der Beweis folgt aus einem recht

1) Das System (13) hat erst mit (9) und (11) zusammen tensorielle Bedeutung; das System (11) *tensoriell* nach $x_\alpha$ differenziert, führt wegen (9) und (11) auf (13).

allgemeinen Theorem über Systeme totaler Differentialgleichungen, dessen exakte Durchführung hier allzuviel Platz beanspruchen würde.[1])

Der auffallendste Fall ist wohl der extreme, daß die Anfangslage (14) beliebig wählbar ist. Dann können keine einschränkenden Bedingungsgleichungen existieren, es müssen also schon die Komponenten des Krümmungstensors identisch verschwinden. Also ist

$$R^{i}{}_{t r q} \equiv 0 \tag{15}$$

notwendig und hinreichend *für die Eindeutigkeit der Parallelverschiebung jedes durch seine Anfangslage bestimmten Vektors.*

Wir gehen an die nähere Untersuchung der Räume, für die das System (15) gilt. In einem solchen $R_n$ können wir ein eindeutig parallel verschobenes normiertes $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^{i}$ $(\alpha = 1, \ldots, n)$, konstruieren. Der Maßtensor hat in bezug auf dieses die Darstellung

$$g^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda^{i}{}_{(\alpha)}\lambda^{k}. \tag{16}$$

Wir bilden, wenn ${}_{(\alpha)}\lambda_{i}$ die kovarianten Komponenten der Vektoren des $n$-Beins sind,

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \int_{P_0}^{P} {}_{(i)}\lambda_k \, d x_k, \quad {}_{(i)}\lambda_k = g_{kj}\, {}_{(i)}\lambda^{j}. \tag{17}$$

Da ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ein parallel verschobener Vektor ist, so gilt

$$\frac{\partial\, {}_{(i)}\lambda_k}{\partial x_j} = \left\{ {kj \atop r} \right\} {}_{(i)}\lambda_r, \tag{18}$$

also[2])

$$\frac{\partial\, {}_{(i)}\lambda_k}{\partial x_j} - \frac{\partial\, {}_{(i)}\lambda_j}{\partial x_k} = 0. \tag{19}$$

Dies rechtfertigt die Schreibweise für das Integral (17), denn wir wissen nun, daß dieses Integral in der Tat nur eine Funktion der Koordinaten des Punktes $P$ ist. Aus (17) folgt weiter

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} = {}_{(i)}\lambda_k, \tag{20}$$

also

$$\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} \right| \neq 0. \tag{20'}$$

1) Vgl. etwa EISENHART, *Non-riemannian geometry*, New York 1927, S. 15 ff.

2) Es ist von Interesse, daß für jeden eindeutig parallel verschobenen Vektor $\lambda_k$ der *Rotationstensor* $\frac{\partial \lambda_k}{\partial x_j} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_k}$ verschwindet.

Wegen (18) und (20) ist $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ zweimal stetig differenzierbar. Wir sehen nun

(21) $$\bar{x}_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$$

als eine Koordinatentransformation für die Punkte einer genügend eingeschränkten Umgebung des Punktes $P_0$ an, die so eng begrenzt sei, daß in ihr das System (21) nach den $x_1, \ldots, x_n$ auflösbar ist. $P_0$ erhält die neuen Koordinaten $\bar{x}_i = 0$. Wir berechnen nun im System $\bar{x}_i$ die Komponenten ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i$ der Vektoren des normierten parallel verschobenen $n$-Beins; für sie gilt

(22) $${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\,{}_{(\alpha)}\lambda^k = {}_{(i)}\lambda_k\,{}_{(\alpha)}\lambda^k = \delta_{\alpha i}.$$

Nach (16) erhalten wir im System $\bar{x}_i$ für den Maßtensor $\bar{g}^{ik}$

(23) $$\bar{g}^{ik} = {}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^i\,{}_{(\alpha)}\bar{\lambda}^k = \delta_{\alpha i}\,\delta_{\alpha k} = \delta_{ik},$$

die *euklidische Maßbestimmung*, d. h. die Maßform des auf rechtwinklig kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen $R_n$. Ist $g^{ik}$ konstant, so besteht auch, da ja $\left\{ {pq \atop i} \right\} \equiv 0$ wird, das System (15), das also notwendig und hinreichend dafür ist, daß $g_{ik}$ in die Form $g_{ik} = \delta_{ik}$ gebracht werden kann. *Das Verschwinden des Krümmungstensors, d. h. die Eindeutigkeit der Parallelverschiebung, ist für den euklidischen Raum charakteristisch.*

Für kartesische Koordinaten ($g_{ik} =$ konst.) eines euklidischen $R_n$ gilt für einen parallel verschobenen Vektor (6), (6′)

(24) $$d\lambda^i = 0, \quad d\lambda_i = 0,$$

also $\lambda^i$ (bzw. $\lambda_i$) konstant. Wir kommen so zu dem wohlvertrauten Begriff der Parallelverschiebung in euklidischen Räumen.

Es sei in $P_0$ ein durch ein normiertes $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_0^i$ ($\alpha = 1, \ldots, r$) aufgespannter $r$ dimensionaler Vektorraum

$$V^{(r)}(P_0) = \{x_1^0, \ldots, x_n^0;\ {}_{(\alpha)}\lambda_0^1, \ldots, {}_{(\alpha)}\lambda_0^n\}$$

gegeben. Sein Projektionstensor ist

$$p_0^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda_0^i\,{}_{(\alpha)}\lambda_0^k \qquad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

Verschieben wir längs eines Bogens $C_{P_0}^P$ das $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_0^i$ parallel, so spannt es in $P$ den längs $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Vektorraum auf. Da $\mathfrak{d}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ längs $C_{P_0}^P$ gilt, so ist auch $\mathfrak{d}p^{ik} = 0$, d. h. der Projektionstensor eines längs eines Bogens $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Vektorraumes ist ein parallel verschobener Tensor. Gilt umgekehrt $\mathfrak{d}p^{ik} = 0$ längs $C_{P_0}^P$ für den Projektionstensor $p^{ik}$ eines längs $C_{P_0}^P$ definierten Vektorraumes $V^{(r)}$, so folgt aus $p_0^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda_0^i\,{}_{(\alpha)}\lambda_0^k$, wenn wir das normierte $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_0^i$ parallel von $P_0$ nach $P$ verschieben, daß $p^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda^i{}_{(\alpha)}\lambda^k$ längs des ganzen Bogens $C_{P_0}^P$ ist. Der Vektorraum $V^{(r)}$, der durch jedes $r$-Bein aufgespannt wird, das in die kanonische Darstellung seines Projektionstensors $p^{ik}$ eintritt, ist also identisch mit dem von $P_0$ längs $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Vektorraume $V^{(r)}(P_0)$. *Charakteristisch für einen längs $C_{P_0}^P$ parallel verschobenen Vektorraum ist demnach, daß sein Projektionstensor $p^{ik}$ ein längs $C_{P_0}^P$ parallel verschobener Tensor ist.*

Es kann eintreten, daß in jedem Punkte des $R_n$ ein Vektorraum $V^{(r)}$ existiert, der längs jedes Bogens ein parallel verschobener Vektorraum ist, ohne daß einer seiner Vektoren diese Eigenschaft haben müßte. Die Existenz eines solchen Vektorraumes ist gleichbedeutend mit der Existenz eines Projektionstensors $p^{ik}$, der eindeutig parallel verschoben ist. Ein Beispiel liefert der Maßtensor $g^{ik}$, der Projektionstensor des $n$ dimensionalen Vektorraumes $V^{(n)}$.

*Ist für eine Kurve des $R_n$ die $k$ te Krümmung Null, so ist der von den Vektoren ${}_{(1)}\xi^i$, ${}_{(2)}\xi^i$, ..., ${}_{(k)}\xi^i$ aufgespannte Vektorraum, der „$k-1$ te Schmiegraum $V^{(k)}$“, längs der Kurve parallel verschoben.* Man zeige dies unter Benutzung der Frenetschen Formeln (III, § 1).[1])

## § 2. Eine Reihenentwicklung für die Parallelverschiebung. Der Krümmungstensor.

Wir schreiben statt der Christoffelklammern $\left\{ {p\,q \atop i} \right\}$ das Symbol $-\Gamma^i_{pq}$, betonen aber, daß diese häufig verwendete Schreibart nicht gerade sehr zweckmäßig ist, da die Klammer, der kein tensorieller Charakter zukommt, nunmehr im Gewande eines Tensors auftritt. Aus den Differentialgleichungen

$$d\lambda^i = \Gamma^i_{pq}\,\lambda^p\,d x_q \tag{1}$$

für den parallel verschobenen Vektor $\lambda^i$, erhält man durch Integration die mit (1) äquivalenten Integralgleichungen

$$\lambda^i(Q) = \lambda^i(P) + \int_P^Q \Gamma^i_{pq}\,\lambda^p\,d x_q, \tag{2}$$

denen längs $C_P^Q$ der parallel verschobene Vektor zu genügen hat.

Eine Lösung eines solchen Systems von Integralgleichungen erhält man aus der folgenden Reihenentwicklung. Wir setzen in das Integral rechter Hand in (2) den Wert $\lambda^p$ ein, wie er sich aus (2) ergibt, und erhalten

$$\lambda^i(Q) = \lambda^i(P) + \lambda^p(P)\int_P^Q \Gamma^i_{pq}\,d x_q + \int_P^Q \Gamma^i_{pq}\,d x_q \int_P^{Q_1} \Gamma^p_{p_1 q_1}\,\lambda^{p_1}\,d x_{q_1}. \tag{2'}$$

1) Setzt man $p^{ik} = {}_{(\alpha)}\xi^i{}_{(\alpha)}\xi^k$ $(\alpha = 1, \ldots, k)$, so ist $\mathfrak{d}p^{ik} = 0$.

Hier wird in das letzte Integral wieder $\lambda^{p_1}$ aus (2) eingesetzt usw.; es ergeben sich schließlich Reihenentwicklungen

$$\lambda^i(Q) = \lambda^j(P)\left[\delta_j^i + \int_P^Q \Gamma_{jq}^i\, dx_q + \int_P^Q \Gamma_{pq}^i\, dx_q \int_P^{Q_1} \Gamma_{jq_1}^p\, dx_{q_1}\right. \tag{3}$$

$$\left. + \int_P^Q \Gamma_{pq}^i\, dx_q \int_P^{Q_1} \Gamma_{p_1 q_1}^p\, dx_{q_1} \int_P^{Q_2} \Gamma_{jq_2}^{p_1}\, dx_{q_2} + \cdots\right],$$

die *formal* dem System (2) genügen und die, wenn wir ihre *gleichmäßige Konvergenz* längs jedes Kurvenbogens endlicher Länge nachweisen, für jeden solchen Bogen tatsächlich eine Lösung von (2) darstellen, da sich die Reihen (3) dann gliedweise integrieren lassen.

Mit $s$ sei die von $P$ aus gemessene Bogenlänge auf dem Bogen $C_P^Q$ bezeichnet. Dann ist $dx_q = x_q' ds$ und $x_q'$ ein Einheitsvektor. Aus der kanonischen Darstellung $g^{ik} = {}_{(\alpha)}\xi^i{}_{(\alpha)}\xi^k$ des Maßtensors folgt $g^{ii} \geqq (\xi^i)^2$ für Einheitsvektoren $\xi^i$, also (nicht summieren über $i$!)

$$|\sqrt{g^{ii}}| \geqq |\xi^i|. \tag{4}$$

Somit liegen die absoluten Beträge $|x_i'|$ unter einer gemeinsamen endlichen Schranke, die mit $X$ bezeichnet sei. Dabei ist der Bereich des $R_n$, in welchen wir den Bogen $C_P^Q$ legen, als abgeschlossen vorausgesetzt und in ihm $g_{ik}$ (und $g^{ik}$) als stetig. Wenn wir noch weiter die Stetigkeit der Ableitungen des Maßtensors in diesem Bereiche fordern, so ist auch $\Gamma_{jq}^i$ stetig und auch die $|\Gamma_{jq}^i|$ liegen unter einer endlichen Schranke $M$. Wenn wir mit $S$ das Integral $\int_P^Q ds$ bezeichnen, so gelten die Ungleichungen

$$\left|\int_P^Q \Gamma_{jq}^i\, dx_q\right| < nMXS, \tag{5}$$

$$\left|\int_P^Q \Gamma_{pq}^i\, dx_q \int_P^{Q_1} \Gamma_{jq_1}^p\, dx_{q_1}\right| < nMX \int_P^Q |\Gamma_{pq}^i|\,|x_q'|\, s\, ds < \frac{n^2M^2X^2S^2}{2}, \tag{5'}$$

$$\left|\int_P^Q \Gamma_{pq}^i\, dx_q \int_P^{Q_1} \Gamma_{p_1q_1}^p\, dx_{q_1} \int_P^{Q_2} \Gamma_{jq_2}^{p_1}\, dx_{q_2}\right| \tag{5''}$$

$$< \frac{n^2M^2X^2}{2} \int_P^Q |\Gamma_{pq}^i|\,|x_q'|\, s^2 ds < \frac{n^3M^3X^3S^3}{3!}$$

usw. *Die Reihe* (3) *konvergiert somit längs eines jeden Bogens endlicher Länge gleichmäßig und ist daher eine Lösung von* (2).

Bevor wir eine interessante Anwendung für die von uns gegebene Reihenentwicklung bringen, müssen wir uns mit dem im vorhergehenden Paragraphen aufgetretenen Krümmungstensor näher befassen. Als erstes haben wir den Nachweis zu erbringen, daß es sich wirklich um einen Tensor handelt. Im Punkte $P$ und einer Umgebung $\mathfrak{U}(P)$ sei der zweimal stetig differenzierbare kovariante Vektor $\varphi_i$ definiert. Wir bilden dann $\frac{\mathfrak{d}\varphi_i}{\mathfrak{d}x_k}$ und weiter $\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}x_l}\left(\frac{\mathfrak{d}\varphi_i}{\mathfrak{d}x_k}\right)=\frac{\mathfrak{d}^2\varphi_i}{\mathfrak{d}x_l\,\mathfrak{d}x_k}$.

Endlich bilden wir den in den Indizes $l$ und $k$ schiefsymmetrischen Tensor $\frac{\mathfrak{d}^2\varphi_i}{\mathfrak{d}x_l\,\mathfrak{d}x_k}-\frac{\mathfrak{d}^2\varphi_i}{\mathfrak{d}x_k\,\mathfrak{d}x_l}$, dessen expliziter Ausdruck uns den gewünschten Nachweis liefert. Setzen wir

$$\varphi_{ik}=\frac{\mathfrak{d}\varphi_i}{\mathfrak{d}x_k}=\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_k}-\left\{{ik \atop r}\right\}\varphi_r, \tag{6}$$

so ist

$$\frac{\mathfrak{d}\varphi_{ik}}{\mathfrak{d}x_l}=\frac{\partial\varphi_{ik}}{\partial x_l}-\left\{{il \atop r}\right\}\varphi_{rk}-\left\{{kl \atop r}\right\}\varphi_{ir}, \tag{6'}$$

oder

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi_i}{\mathfrak{d}x_l\,\mathfrak{d}x_k}&=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_l\,\partial x_k}-\varphi_r\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{{ik \atop r}\right\}-\left\{{ik \atop r}\right\}\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_l}-\left\{{il \atop r}\right\}\varphi_{rk}-\left\{{kl \atop r}\right\}\varphi_{ir}\\&=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_l\,\partial x_k}-\varphi_r\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{{ik \atop r}\right\}-\left\{{ik \atop r}\right\}\left[\varphi_{rl}+\left\{{rl \atop s}\right\}\varphi_s\right]-\left\{{il \atop r}\right\}\varphi_{rk}-\left\{{kl \atop r}\right\}\varphi_{ir}.\end{aligned} \tag{7}$$

Daraus folgt

$$\frac{\mathfrak{d}^2\varphi_i}{\mathfrak{d}x_l\,\mathfrak{d}x_k}-\frac{\mathfrak{d}^2\varphi_i}{\mathfrak{d}x_k\,\mathfrak{d}x_l}=\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{{il \atop r}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_l}\left\{{ik \atop r}\right\}+\left\{{il \atop s}\right\}\left\{{sk \atop r}\right\}-\left\{{ik \atop s}\right\}\left\{{sl \atop r}\right\}\right]\varphi_r \tag{8}$$

oder wegen (1, 12)

$$\frac{\mathfrak{d}^2\varphi_i}{\mathfrak{d}x_l\,\mathfrak{d}x_k}-\frac{\mathfrak{d}^2\varphi_i}{\mathfrak{d}x_k\,\mathfrak{d}x_l}=R^r_{\;ikl}\,\varphi_r. \tag{9}$$

Bemerkt sei, daß (9) mit $\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_k\,\partial x_l}=\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x_l\,\partial x_k}$ äquivalent ist, eine Tatsache, von der wir später Gebrauch machen werden.

In (9) steht links ein Tensor von der Art $T_{ikl}$; da also für einen beliebigen kovarianten Vektor $\varphi_r$ auch die rechte Seite ein solcher Tensor ist, so *ist $R^r_{\cdot ikl}$ ein einfach kontravarianter, dreifach kovarianter Tensor vierter Stufe.* Mit $R_{jikl}$ bezeichnen wir den in allen Indizes kovarianten Tensor vierter Stufe *(kovarianter Krümmungstensor)*

$$R_{jikl}=g_{jr}\,R^r_{\cdot ikl}. \tag{10}$$

Wegen $\left\{{il \atop r}\right\}g_{jr}=\left[{il \atop j}\right]$ erhalten wir

$$R_{jikl}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[{il \atop j}\right]-\left\{{il \atop r}\right\}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_k}-\frac{\partial}{\partial x_l}\left[{ik \atop j}\right]+\left\{{ik \atop r}\right\}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_l}+\left\{{il \atop s}\right\}\left[{sk \atop j}\right]-\left\{{ik \atop s}\right\}\left[{sl \atop j}\right] \tag{11}$$

oder

$$(11') \qquad R_{jikl} = \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{bmatrix} i\,l \\ j \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} i\,k \\ j \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,l \\ r \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_k} - \begin{bmatrix} r\,k \\ j \end{bmatrix}\right) + \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_l} - \begin{bmatrix} r\,l \\ j \end{bmatrix}\right).$$

Wegen $\begin{bmatrix} r\,k \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\,k \\ r \end{bmatrix} = \frac{\partial g_{ir}}{\partial x_k}$ gilt weiter

$$(11'') \qquad R_{jikl} = \frac{\partial}{\partial x_k}\begin{bmatrix} i\,l \\ j \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{bmatrix} i\,k \\ j \end{bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,l \\ r \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} j\,k \\ r \end{bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\begin{bmatrix} j\,l \\ r \end{bmatrix}.$$

Eine ganz einfache Rechnung ergibt endlich

$$(12) \qquad R_{jikl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x_j \partial x_l} + \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x_i \partial x_l}\right) - g^{rt}\left(\begin{bmatrix} j\,k \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\,l \\ t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} j\,l \\ r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\,k \\ t \end{bmatrix}\right).$$

An dieser Formel bestätigt man sofort die Relationen

$$(13) \qquad \begin{cases} R_{iklm} = -R_{ikml} = -R_{kilm} = R_{kiml}, \\ R_{iklm} = R_{lmik}, \\ R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0. \end{cases}$$

Gelten für einen Tensor $S_{ijkl}$ die Relationen

$$(13') \qquad \begin{cases} S_{ijkl} = -S_{jikl},\; S_{ijkl} = S_{klij}, \\ S_{ijkl} + S_{iklj} + S_{iljk} = 0, \end{cases}$$

so sind seine Komponenten durch die quadratische Form

$$(14) \qquad S_{ijkl}\Delta^{ij}\Delta^{kl}$$

beliebiger PLÜCKERtensoren $\Delta^{ij} = \varrho^i\sigma^j - \varrho^j\sigma^i$ eindeutig bestimmt, oder, was dasselbe besagt, *aus dem Verschwinden der quadratischen Form* (14) *für jeden Plückerschen Tensor folgt* $S_{ijkl} = 0$.

In der Tat gilt dann für beliebige Vektoren $\varrho^i, \sigma^i$

$$(15) \qquad 0 = S_{ijkl}\,\varrho^i\varrho^k\sigma^j\sigma^l,$$

d. h.

$$(16) \qquad 0 = S_{ijkl} + S_{kjil} + S_{ilkj} + S_{klij},$$

also wegen (13')

$$(16') \qquad 0 = S_{ijkl} + S_{ilkj}$$

oder

$$(16'') \qquad S_{ijkl} = S_{iljk}.$$

Somit ist $S_{ijkl} = S_{iljk} = S_{iklj}$ also wegen (13') $S_{ijkl} = 0$, w. z. b. w.

Ein Beispiel für einen solchen Tensor ist der Krümmungstensor, ein zweites der Tensor

$$(17) \qquad g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}.$$

Sind $\Delta^{ij}$ die PLÜCKERschen Koordinaten eines zweidimensionalen Vektorraumes $\lambda^i, \mu^i$ eines Punktes $P$, so nennt man die Invariante

$$k(\Delta^{ij}) = \frac{R_{ijkl}\Delta^{ij}\Delta^{kl}}{(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})\,\Delta^{ij}\Delta^{kl}} \tag{18}$$

*die Riemannsche Krümmung des $R_n$ für die $F_2$-Richtung $\lambda^i, \mu^i$.* Da sich die Tensoren in Zähler und Nenner von (18) gegenüber Indizesvertauschungen nach (13′) verhalten, so kann man rechts entweder in üblicher Art oder über die verschiedenen Kombinationen $ij$ bzw. $kl$ summieren.

Der euklidische $R_n$ hat in jedem Punkte für jede Richtung die Krümmung Null. Neben diesem haben jene Räume die Geometer am meisten beschäftigt, deren Krümmung konstant, d. h. von Punkt und Richtung unabhängig ist. Es sind dies die *Räume konstanter Riemannscher Krümmung,* auf die wir noch sehr eingehend zu sprechen kommen.

*Der Wert der konstanten Krümmung $k$ heißt die Krümmung des betreffenden Raumes.* Ist $k = 0$, ist also der Raum von der Krummung Null, so muß

$$R_{ijkl}\Delta^{ij}\Delta^{kl} \equiv 0 \tag{19}$$

für jeden PLÜCKERschen Tensor $\Delta^{ij}$, d. h. nach der eben angeführten Überlegung $R_{ijkl} = 0$ sein. *Der euklidische $R_n$ ist damit als Riemannscher $R_n$ verschwindender Krümmung gekennzeichnet.* Ist $k$ konstant und ungleich Null, so tritt an Stelle von (19)

$$[R_{ijkl} - k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})]\,\Delta^{ij}\Delta^{kl} \equiv 0 \tag{20}$$

für jeden PLÜCKERschen Tensor $\Delta^{ij}$. Es muß, da $R_{ijkl} - k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$ ebenfalls ein Tensor mit den Symmetrieeigenschaften (13′) ist,

$$R_{ijkl} = k\,(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \tag{21}$$

sein; diese Form des Krümmungstensors ist *charakteristisch* für die Räume konstanter Krümmung.

Für den Krümmungstensor gelten die wichtigen Relationen

$$\frac{\partial R^r_{\cdot ijk}}{\partial x_l} + \frac{\partial R^r_{\cdot ikl}}{\partial x_j} + \frac{\partial R^r_{\cdot ilj}}{\partial x_k} = 0 \tag{22}$$

oder

$$\frac{\partial R_{rijk}}{\partial x_l} + \frac{\partial R_{rikl}}{\partial x_j} + \frac{\partial R_{rilj}}{\partial x_k} = 0 \tag{22'}$$

*(Identitäten von Bianchi).* Die Tensorrelationen (22) und damit auch (22′) sind sicher richtig, sobald wir ihre Gültigkeit in irgendeinem Bezugssystem nachzuweisen vermögen. Wir haben anläßlich der Behandlung der RIEMANNschen

Normalkoordinaten die Definition eines in einem Punkte $P$ geodätischen Koordinatensystems gegeben und gezeigt, daß die Normalkoordinaten in ihrem Zentrum geodätisch sind. Wir wiederholen: Ein Koordinatensystem heißt in $P$ geodätisch, wenn *in* $P$ die $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}$ oder, was dasselbe besagt, die Christoffelklammern verschwinden. Wir bringen nun den Nachweis der Richtigkeit der Relation (22) im betrachteten Punkte $P$ des $R_n$, indem wir ein in $P$ geodätisches Koordinatensystem zugrunde legen. Dann gilt in $P$

$$\frac{\mathfrak{d} R^r_{.ijk}}{\mathfrak{d} x_l} = \frac{\partial R^r_{.ijk}}{\partial x_l} \tag{23}$$

oder wegen (1, 12)

$$\frac{\mathfrak{d} R^r_{.ijk}}{\mathfrak{d} x_l} = \frac{\partial^2 \left\{ {ik \atop r} \right\}}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 \left\{ {ij \atop r} \right\}}{\partial x_k \partial x_l}; \tag{24}$$

mit Hilfe dieses Ausdruckes ist die Richtigkeit von (22) unmittelbar nachzuweisen[1]).

Wir führen (für Tensoren $T_{\cdot}^{\cdot}$, die in allen Punkten des $R_n$ zweimal stetig differenzierbar sind) als neue Operation ein

$$\varDelta_{kl}(T_{\cdot}^{\cdot}) = \frac{\mathfrak{d}^2 T_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}}{\mathfrak{d} x_k \mathfrak{d} x_l} - \frac{\mathfrak{d}^2 T_{\cdot\cdot}^{\cdot\cdot}}{\mathfrak{d} x_l \mathfrak{d} x_k}.$$

---

1) Ein $R_n$ heißt in einem Punkt $P$ *isotrop*, wenn die Krümmung (18) in jeder $F_2$-Richtung $\varDelta^{ij}$ durch $P$ konstant ist. Ein $R_n$ konstanter Krümmung ist in jedem Punkt isotrop, *aber auch umgekehrt folgt für $n > 2$ aus der Isotropie eines $R_n$ in jedem Punkt, daß er ein $R_n$ konstanter Krümmung ist.* Für $n = 2$ ist die Behauptung natürlich unrichtig; für $n > 2$ folgt, wenn wir

$$R_{ijkl} = k(x_1, \ldots, x_n)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

in die Identität (22) einsetzen, wegen $\mathfrak{d} g_{ik} = 0$, $\mathfrak{d} k = dk$

$$\frac{\partial k}{\partial x_h}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + \frac{\partial k}{\partial x_k}(g_{il}g_{jh} - g_{ih}g_{jl}) + \frac{\partial k}{\partial x_l}(g_{ih}g_{jk} - g_{ik}g_{jh}) = 0$$

und daraus durch Überschiebung mit $g^{lj}$ (es ist $g^{lj}g_{lj} = n$)

$$\frac{\partial k}{\partial x_h}(n g_{ik} - g_{ik}) + \frac{\partial k}{\partial x_k}(g_{ih} - n g_{ih}) + \frac{\partial k}{\partial x_k} g_{ih} - \frac{\partial k}{\partial x_h} g_{ik} = 0$$

oder $(n > 2)$

$$\frac{\partial k}{\partial x_h} g_{ik} - \frac{\partial k}{\partial x_k} g_{ih} = 0.$$

Ziehen wir den Index $i$ hinauf, so ergibt sich

$$\frac{\partial k}{\partial x_h}\delta^i_k - \frac{\partial k}{\partial x_k}\delta^i_h = 0;$$

setzen wir hier $i = k \neq h$ bei beliebigem $h$, was wegen $n > 2$ möglich ist, so folgt $\frac{\partial k}{\partial x_h} = 0$, also $k =$ konst., w. z. b. w.

Es gelten die Regeln, die wir ohne den ganz einfachen Beweis nur anschreiben:

(25) $$\Delta_{kl}(U+V) = \Delta_{kl}(U) + \Delta_{kl}(V)$$

(für gleichartige Tensoren);

(26) $$\Delta_{kl}(UV) = U\Delta_{kl}(V) + V\Delta_{kl}(U).$$

Weiter ist

(27) $$\Delta_{kl}(\varphi) = 0,$$

sobald $\varphi$ ein Skalar ist. Die Relation (9) lautet jetzt

(28) $$\Delta_{kl}(\varphi_i) = + R^{r}_{\cdot\, ilk}\varphi_r,$$

also nach Überschiebung mit $g^{ij}$

(29) $$\Delta_{kl}(\varphi^j) = R_{rilk}\varphi^r g^{ij} = - R^{j}_{\cdot\, rlk}\varphi^r.$$

Aus (27), (28), (29) und den Regeln (25), (26) sind wir imstande, das Operationsresultat $\Delta_{kl}(T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot})$ für jeden Tensor $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ anzugeben, wenn wir $T^{\cdot\cdot}_{\cdot\cdot}$ durch irgendein $n$-Bein darstellen.

Eine manchmal brauchbare Darstellung der $R_{jikl}$ in einem normierten $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ergibt sich mittels der am Schluß von III, § 1 eingeführten Bezeichnungen. Aus (III, 1, 21) folgt nämlich

$$\Delta_{lk}\,{}_{(\alpha)}\mu_i = \left[\frac{\partial\,{}_{(\alpha\beta)}C_k}{\partial x_l} - \frac{\partial\,{}_{(\alpha\beta)}C_l}{\partial x_k} + {}_{(\alpha\gamma)}C_k\,{}_{(\gamma\beta)}C_l - {}_{(\alpha\gamma)}C_l\,{}_{(\gamma\beta)}C_k\right]{}_{(\beta)}\mu_i = {}_{(\alpha\beta)}Y_{kl}\,{}_{(\beta)}\mu_i,$$

wenn wir den Klammerausdruck rechts kurz mit ${}_{(\alpha\beta)}Y_{kl}$ bezeichnen. Andrerseits ist aber

$$\Delta_{lk}\,{}_{(\alpha)}\mu_i = R^{h}_{\cdot\, ikl}\,{}_{(\alpha)}\mu_h,$$

so daß

$$R^{h}_{\cdot\, ikl}\,{}_{(\alpha)}\mu_h = {}_{(\alpha\beta)}Y_{kl}\,{}_{(\beta)}\mu_i$$

wird; durch Überschiebung mit ${}_{(\alpha)}\mu_j$ folgt daraus wegen ${}_{(\alpha)}\mu_j\,{}_{(\alpha)}\mu_h = g_{jh}$

(30) $$\boldsymbol{R_{jikl} = {}_{(\alpha\beta)}Y_{kl}\,{}_{(\alpha)}\mu_j\,{}_{(\beta)}\mu_i}.$$

Wir greifen jetzt wieder auf die Reihenentwicklung (3) zurück, die wir

(31) $$\lambda^i(Q) = \lambda^j(P)\,[\delta^i_j + K^i_j(C^Q_P)]$$

schreiben, wo

(32) $$K^i_j(C^Q_P) = \int_P^Q \Gamma^i_{jq}\,dx_q + \int_P^Q \Gamma^i_{pq}\,dx_q \int_P^{Q_1} \Gamma^p_{jq_1}\,dx_{q_1}$$
$$+ \int_P^Q \Gamma^i_{pq}\,dx_q \int_P^{Q_1} \Gamma^p_{p_1q_1}\,dx_{q_1} \int_P^{Q_2} \Gamma^{p_1}_{jq_2}\,dx_{q_2} + \cdots$$

ist, und berechnen für einen geschlossenen doppelpunktfreien[1]) Kurvenbogen $C_P^P$ den Wert $K_j^i(C_P^P)$. Diesen Kurvenbogen denken wir uns in der Form

$$x_i - x_i^0 = \varepsilon \alpha_i(t) + \varepsilon^2 \ldots \tag{33}$$

gegeben; er soll also von einem Parameter $\varepsilon$ so abhängen, daß er für $\lim \varepsilon = 0$ auf den Punkt $P(x_i^0)$ zusammenschrumpft. Die Parameterwerte $t = 0$ und $t = 1$ mögen dem Punkte $P$ entsprechen. Wir führen unsere Rechnung durch bis zu den Gliedern in $\varepsilon^2$. Wir bezeichnen $x_i - x_i^0$ mit $\bar{x}_i$ und Glieder, die $\varepsilon^3$ als Faktor haben, mit $(\varepsilon^3)$. Es ist

$$\int_P^P \Gamma^i_{jk}\, dx_k = \int_P^P \left[\Gamma^i_{jk}(P) + \frac{\partial \Gamma^i_{jk}(P)}{\partial x_l}\bar{x}_l + \cdots\right] dx_k = \frac{\partial \Gamma^i_{jk}(P)}{\partial x_l}\int_P^P \bar{x}_l\, dx_k + (\varepsilon^3),$$

$$\int_P^P \Gamma^i_{j_1 k_1}\, dx_{k_1} \int_P^{Q_1} \Gamma^{j_1}_{jk}\, dx_k = \int_P^P [\Gamma^i_{j_1 k_1}(P) + \cdots]\, dx_{k_1} \int_P^{Q_1} [\Gamma^{j_1}_{jk}(P) + \cdots]\, dx_k$$
$$= \Gamma^i_{j_1 k_1}(P)\, \Gamma^{j_1}_{jk}(P) \int_P^P \bar{x}_k\, dx_{k_1} + (\varepsilon^3).$$

Wir haben demnach

$$K_j^i(C_P^P) = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x_l} + \Gamma^i_{j_1 k}\Gamma^{j_1}_{jl}\right)_P \int_P^P \bar{x}_l\, dx_k + (\varepsilon^3). \tag{34}$$

Aus
$$0 = \int_P^P d(\bar{x}_k \bar{x}_l) = \int_P^P \bar{x}_k\, dx_l + \int_P^P \bar{x}_l\, dx_k$$
folgt dann[2])

$$K_j^i(C_P^P) = -\tfrac{1}{2} R^i_{.\,jlk}(P) \int_P^P \bar{x}_l\, dx_k + (\varepsilon^3). \tag{35}$$

Die einparametrige Kurvenschar (33) liege auf der $F_2$

$$x_i = x_i(u, v) \tag{36}$$
und sei in dieser durch
$$u = \varepsilon\alpha(t), \quad v = \varepsilon\beta(t) \tag{36'}$$
definiert.

Für $t = 0$ und $t = 1$ mögen $\alpha(t)$ und $\beta(t)$ verschwinden, $x_i(0, 0)$ ist also der Punkt $P$. In $P$ bestehe die Entwicklung

$$x_i(u, v) = x_i(0, 0) + \frac{\partial x_i(0, 0)}{\partial u} u + \frac{\partial x_i(0, 0)}{\partial v} v + \cdots, \tag{37}$$

---

1) Stetigkeit und Differenzierbarkeit der im folgenden auftretenden Funktionen ist dabei im erforderlichen Umfang vorausgesetzt!

2) Es wurde $\left\{ {p\,q \atop r} \right\} = -\Gamma^r_{pq}$ gesetzt, daher das Minuszeichen in (35).

also

$$\bar{x}_i = x_i(t) - x_i(0) = \varepsilon\left[\frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u}\alpha(t) + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v}\beta(t)\right] + \varepsilon^2 \ldots \tag{38}$$

Aus (37) folgt $\quad dx_i = \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u}du + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v}dv + \varepsilon^2 \ldots;$
somit ist[1])

$$\int\limits_P^P \bar{x}_l\, dx_k = \int\limits_P^P \left(\frac{\partial x_l(0,0)}{\partial u}u + \frac{\partial x_l(0,0)}{\partial v}v\right)\left(\frac{\partial x_k(0,0)}{\partial u}du + \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial v}dv\right) + (\varepsilon^3) \tag{39}$$

$$= \left(\frac{\partial x_l(0,0)}{\partial u}\,\frac{\partial x_k(0,0)}{\partial v} - \frac{\partial x_l(0,0)}{\partial v}\,\frac{\partial x_k(0,0)}{\partial u}\right)\int\limits_P^P u\, dv + (\varepsilon^3).$$

Mit $\gamma_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ sei der Maßtensor der $F_2$ (36) bezeichnet; die Oberfläche, die $C_P^P$ auf dieser $F_2$ umrandet, wird durch das Integral

$$O = \int \sqrt{\gamma}\, du\, dv, \tag{40}$$

gemessen, wo $\gamma = \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2$ ist. Nun ist

$$\sqrt{\gamma} = \sqrt{\gamma}_{(P)} + \left(\frac{\partial\sqrt{\gamma}}{\partial u}\right)_{(P)} u + \cdots = \sqrt{\gamma}_{(P)} + \varepsilon \ldots,$$

somit

$$O = \sqrt{\gamma}_{(P)} \int du\, dv + (\varepsilon^3). \tag{41}$$

Für das in (41) auftretende Integral gilt aber

$$\int du\, dv = \pm \int\limits_P^P u\, dv,$$

wobei der Umlaufsinn über das Vorzeichen entscheidet. Wir erhalten somit

$$O = \pm \sqrt{\gamma}_{(P)} \int\limits_P^P u\, dv + (\varepsilon^3) \tag{41'}$$

und weiter wegen (39)

$$\int\limits_P^P \bar{x}_l\, dx_k = \pm \frac{\frac{\partial x_l(0,0)}{\partial u}\,\frac{\partial x_k(0,0)}{\partial v} - \frac{\partial x_l(0,0)}{\partial v}\,\frac{\partial x_k(0,0)}{\partial u}}{\sqrt{\gamma}_{(P)}}\, O + (\varepsilon^3). \tag{42}$$

Ist jetzt $\varrho^i$, $\sigma^i$ ein normiertes Zweibein der $F_2$ (36) in $P$, so besteht die Darstellung

$$\varrho^i = \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u}\mathfrak{r}^1 + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v}\mathfrak{r}^2, \quad \sigma^i = \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial u}\mathfrak{s}^1 + \frac{\partial x_i(0,0)}{\partial v}\mathfrak{s}^2, \tag{43}$$

---

1) Da $\int\limits_P^P u\, du = \int\limits_P^P v\, dv = 0$ und $\int\limits_P^P u\, dv = -\int\limits_P^P v\, du$ ist.

wo $\mathfrak{r}^\alpha$, $\mathfrak{s}^\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ die kontravarianten Komponenten des normierten Zweibeins bezüglich der $F_2$ sind. Dann folgt aus der kanonischen Darstellung $\gamma^{\alpha\beta} = \mathfrak{r}^\alpha \mathfrak{r}^\beta + \mathfrak{s}^\alpha \mathfrak{s}^\beta$ des Maßtensors $\gamma^{\alpha\beta}$ durch das Zweibein $\mathfrak{r}^\alpha$, $\mathfrak{s}^\alpha$

$$(44) \qquad \frac{1}{\gamma} = \begin{vmatrix} \gamma^{11} & \gamma^{12} \\ \gamma^{21} & \gamma^{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathfrak{r}^1 & \mathfrak{r}^2 \\ \mathfrak{s}^1 & \mathfrak{s}^2 \end{vmatrix}^2.$$

Somit ist

$$(45) \quad \frac{1}{\sqrt{\gamma_{(P)}}} \left( \frac{\partial x_l(0,0)}{\partial u} \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial v} - \frac{\partial x_k(0,0)}{\partial u} \frac{\partial x_l(0,0)}{\partial v} \right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_l(00)}{\partial u} & \frac{\partial x_l(00)}{\partial v} \\ \frac{\partial x_k(00)}{\partial u} & \frac{\partial x_k(00)}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{r}^1 & \mathfrak{r}^2 \\ \mathfrak{s}^1 & \mathfrak{s}^2 \end{vmatrix}$$
$$= \varrho^l \sigma^k - \varrho^k \sigma^l = \pi^{lk},$$

wo $\pi^{lk}$ der normierte PLÜCKERsche Tensor der $F_2$ in $P$ ist. Also gilt

$$(46) \qquad \int_P^P \bar{x}_l \, d x_k = \pm \pi^{lk} O + (\varepsilon^3),$$

eine Formel, die man übrigens auch zur Definition des PLÜCKERschen Tensors des Tangentenvektorraumes einer $F_2$ in einem ihrer Punkte $P$ verwenden kann.

Statt (35) erhalten wir dann

$$(47) \qquad K^i_j (C^P_P) = \pm \tfrac{1}{2} R^i{}_{jlk} \pi^{lk} O + (\varepsilon^3)$$

und statt (31), wenn wir mit $D\lambda^i$ den Zuwachs von $\lambda^i$ längs $C^P_P$ bezeichnen,

$$(48) \qquad D\lambda^i = \pm \tfrac{1}{2} R^i{}_{jlk} \lambda^j \pi^{lk} O + (\varepsilon^3)$$

und weiter

$$(49) \qquad \lim_{\varepsilon = 0} \frac{D\lambda^i}{O} = \pm \frac{1}{2} R^i{}_{\cdot jlk} \lambda^j \pi^{lk}.$$

Ausgedrückt durch das Operationssymbol $\Delta_{kl}$ können wir (49) auch

$$(50) \qquad \lim_{\varepsilon = 0} \frac{D\lambda^i}{O} = \pm \frac{1}{2} \Delta_{kl}(\lambda^i) \pi^{lk}$$

schreiben. (Umlauf um ein „infinitesimales Parallelogramm".)

## § 3. Geodätische Mannigfaltigkeiten und geodätische Koordinaten.

Wir definieren: *Eine $F_l$ des $R_n$ heißt in einem ihrer Punkte $P_0$ geodätisch, wenn die durch $P_0$ gehenden Geodätischen der $F_l$ die erste Raumkrümmung*[1] *Null haben.* Ist in einem Punkt $P_0$ des $R_n$ ein normiertes $l$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1, \ldots, l)$ gegeben, so bestimmen alle Geodätischen des $R_n$, die durch $P_0$ gehen und deren

1) *Raum*krümmung im Gegensatz zur *Flächen*krümmung oder *geodätischen Krümmung* bezüglich der $F_l$ als $l$ dimensionaler RIEMANNscher Raum.

Richtungen in $P_0$ dem Vektorraum $\{{}_{(\alpha)}\lambda^i\}$ angehören, eine in $P_0$ geodätische $F_l$ besonderer Art; wir nennen eine solche $F_l$ im *engeren Sinn geodätisch.*

Wir fragen uns zunächst nach den Relationen, denen eine $F_{n-1}$ zu genügen hat, damit sie in $P_0$ geodätisch ist. Die entsprechenden Relationen für die allgemeine $F_l$ bringen wir in VII. Es sei

(1) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

eine in $P_0(x_i^0)$ geodätische $F_{n-1}$, so daß $\varphi(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$ ist. Die Kurve

(2) $$x_i = x_i(s)$$

sei eine auf die Bogenlänge $s$ bezogene Flächengeodätische durch $P_0$, so daß

(3) $$\varphi\left(x_1(s), \ldots, x_n(s)\right) \equiv 0$$

ist und die erste Raumnormale ${}_{(2)}\xi^i$ von (2) auf der $F_{n-1}$ senkrecht steht. Aus (3) folgt durch Differentiation nach $s$

(4) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,{}_{(1)}\xi^i = 0,$$

wo ${}_{(1)}\xi^i = \frac{d x_i}{d s}$ der Tangentenvektor von (2) ist, und weiter durch nochmalige (absolute) Differentiation

(5) $$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i\, \mathfrak{d} x_k}\,{}_{(1)}\xi^i\,{}_{(1)}\xi^k + \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,{}_{(2)}\xi^i = 0.$$

Dabei ist $\frac{1}{\varrho_1}$ die erste Raumkrümmung von (2). In $P_0$ ist nach Voraussetzung $\frac{1}{\varrho_1} = 0$ für jede Flächengeodätische, also ist (in $P_0$)

(6) $$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i\, \mathfrak{d} x_k}\,{}_{(1)}\xi^i\,{}_{(1)}\xi^k = 0$$

eine Folge von (4). Gilt umgekehrt (6) in einem Punkt $P_0$, so ist für jede Kurve der $F_{n-1}$ durch $P_0$

(7) $$\frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,{}_{(2)}\xi^i = 0.$$

Für die Flächengeodätischen durch $P_0$ ist aber $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,{}_{(2)}\xi^i \neq 0$, da ${}_{(2)}\xi^i$ senkrecht zur $F_{n-1}$ ist, und somit muß $\frac{1}{\varrho_1} = 0$ sein. *Notwendig und hinreichend, damit die $F_{n-1}$ (1) in $P_0$ geodätisch ist, ist also, daß in $P_0$ die Relation (6) gilt.*

Wir beweisen den Hilfssatz: *Ist $A_{ik}$ ein symmetrischer Tensor zweiter Stufe und $A_{ik}\xi^i\xi^k = 0$ eine Folge von ${}_{(\alpha)}\nu_i\xi^i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, t)$, wo ${}_{(\alpha)}\nu_i$ ein kovariantes t-Bein ist, so gilt*

(8) $$A_{ik} = {}_{(\alpha)}\nu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k + {}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\nu_k \qquad (\alpha = 1, \ldots, t).$$

Wir ergänzen ${}_{(\alpha)}\nu_i$ zu einem $n$-Bein und bezeichnen das adjungierte $n$-Bein mit ${}_{(\alpha)}\lambda^i$. Dann gilt

$$(9)\qquad \begin{aligned} A_{ik} &= {}_{(\alpha\beta)}A\,{}_{(\alpha)}\nu_i\,{}_{(\beta)}\nu_k, \\ {}_{(\alpha\beta)}A &= {}_{(\beta\alpha)}A = A_{ik}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\beta)}\lambda^k \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

Nun ist ${}_{(\sigma)}\nu_i\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ für $\sigma = 1, \ldots, t$ und $\alpha = t+1, \ldots, n$, und somit gilt nach Annahme $A_{ik}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\alpha)}\lambda^k = 0$ für $\alpha = t+1, \ldots, n$ (nicht summieren über $\alpha$!). Ebenso ist $A_{ik}({}_{(\alpha)}\lambda^i + {}_{(\beta)}\lambda^i)({}_{(\alpha)}\lambda^k + {}_{(\beta)}\lambda^k) = 0$ und somit auch $A_{ik}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\beta)}\lambda^k = {}_{(\alpha\beta)}A = 0$ für $\alpha > t$ und $\beta > t$. Setzen wir

$${}_{(\alpha)}\mu_k = \frac{1}{2}\sum_{\beta=1}^{t} {}_{(\alpha\beta)}A\,{}_{(\beta)}\nu_k + \sum_{\beta=t+1}^{n} {}_{(\alpha\beta)}A\,{}_{(\beta)}\nu_k \qquad (\alpha = 1, \ldots, t),$$

so folgt aus (9) die Relation (8).

Wenden wir diesen Hilfssatz auf (6) an, so folgt, daß das Bestehen von

$$(10)\qquad \frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_i\,\mathfrak{d}x_k} = a_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + a_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}$$

in $P_0$ ebenfalls *charakteristisch für eine in $P_0$ geodätische $F_{n-1}$* ist. Der in $P_0$ definierte Vektor $a_k$ hängt dabei wesentlich von der Funktion $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ab.

Wir zeigen, daß es stets eine Darstellung $\psi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ der in $P_0$ geodätischen $F_{n-1}$ gibt, fur die der Vektor $a_k$ verschwindet; eine solche Darstellung der $F_{n-1}$ nennen wir *reduziert*. Ist $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ eine in $P_0$ und in einer Umgebung von $P_0$ nicht verschwindende Funktion, so wird in dieser Umgebung

$$(11)\qquad \psi(x_1, \ldots, x_n) = \alpha(x_1, \ldots, x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

ebenfalls die $F_{n-1}$ (1) darstellen. Nun ist

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\varphi, \quad \frac{\mathfrak{d}^2\psi}{\mathfrak{d}x_i\,\mathfrak{d}x_k} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_k} + \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + \frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_i\,\mathfrak{d}x_k}\alpha + \frac{\mathfrak{d}^2\alpha}{\mathfrak{d}x_i\,\mathfrak{d}x_k}\varphi,$$

also in $P_0$

$$(12)\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\alpha$$

und

$$(13)\qquad \frac{\mathfrak{d}^2\psi}{\mathfrak{d}x_i\,\mathfrak{d}x_k} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\left(\frac{\partial\ln\alpha}{\partial x_k} + a_k\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\ln\alpha}{\partial x_i} + a_i\right).$$

Wählen wir also $\ln\alpha$ als stetig differenzierbare Funktion, für die in $P_0$ $\dfrac{\partial\ln\alpha}{\partial x_i} = -a_i$ ist, so wird $\dfrac{\mathfrak{d}^2\psi}{\mathfrak{d}x_i\,\mathfrak{d}x_k} = 0$. Aus $\alpha = e^{\ln\alpha}$ folgt wegen der Stetigkeit von $\ln\alpha$, daß $\alpha$, wie vorausgesetzt, nicht verschwindet.

Der Vektor $a_i$ des Punktes $P_0$ ist durch (10) bestimmt. Zur Berechnung der Komponenten benötigt man aber nur einen Teil dieser Gleichungen, z. B., wenn im zugrunde liegenden Koordinatensystem $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \neq 0$ ist, die Gleichungen

$$\text{(14)} \qquad \frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_k \mathfrak{d} x_n} = a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

aus denen

$$\text{(15)} \qquad a_k = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}} \left( \frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_k \mathfrak{d} x_n} - a_n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right), \quad a_n = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_n^2} \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}}$$

folgt. Diese Gleichungen gelten zunächst nur in $P_0$, definieren aber auch in einer Umgebung von $P_0$ einen kovarianten Vektor $a_i$, der stetig ist, wenn $\varphi$ zweimal stetig differenzierbar ist. Für den so definierten Vektor $a_i$ gilt die Tensorrelation (10) nur in $P_0$; in der Umgebung von $P_0$ aber ist

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_k} - a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} - a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = A_{ik}(x_1, \ldots, x_n)$$

ein stetiger symmetrischer Tensor zweiter Stufe, der in $P_0$ verschwindet. Wir können daher statt (10) auch

$$\text{(16)} \qquad \frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_k} = a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + A_{ik}$$

schreiben, eine Relation, die in der Umgebung von $P_0$ gilt. Dabei ist

$$\text{(17)} \qquad A_{ik}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = 0$$

($x_i^0$ sind die Koordinaten von $P_0$). Von (10) gelangt man zu (16) und (17), wenn man das Definitionsgebiet von $a_i$ über den Punkt $P_0$ hinaus (in weitgehend willkurlicher Weise) erweitert.

Wir fragen uns nach einem möglichst einfachen Ausdruck für eine in $P_0$ geodätische $F_{n-1}$, die in $P_0$ den gegebenen Normalenvektor $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$ hat. Ist die $F_{n-1}$ in reduzierter Darstellung gegeben, so müssen

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_k} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ {ik \atop r} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} = 0$$

und die Nebenbedingungen $\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$

in $P_0$ gelten. Die einfachste[1]) derartige geodätische $F_{n-1}$ ist dann

$$\text{(18)} \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x_i - x_i^0)\left[p_i + \frac{1}{2}\left\{ {ik \atop l} \right\}_0 p_l (x_k - x_k^0)\right].$$

1) „Einfachst" bezieht sich auf das zugrunde liegende Koordinatensystem; der $F_{n-1}$ kommt natürlich keinerlei „Einfachheit" zu.

In der Taylorentwicklung für die reduzierte Darstellung jeder anderen in $P_0$ geodätischen $F_{n-1}$ müssen die Glieder bis zum zweiten Grade in $x_i - x_i^0$ mit (18) übereinstimmen, während alle folgenden willkürlich sind.

Ein Koordinatensystem heißt *geodätisch in einem Punkt $P_0$ des $R_n$*, wenn in diesem Koordinatensystem alle Ableitungen $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_l}$ des Maßtensors $g_{ik}$ oder, was dasselbe besagt, alle Christoffelklammern $\left\{ {p\,q \atop r} \right\}$ *im Punkt* $P_0$ verschwinden. Die Riemannschen Normalkoordinaten mit dem Ursprung $P_0$ sind nach (V, 11, 14) in $P_0$ geodätisch.

Wir suchen zunächst notwendige und hinreichende Bedingungen, damit eine Koordinatentransformation

$$\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{19}$$

zu einem in $P_0$ geodätischen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ führt. Zu diesem Zweck berechnen wir aus (19), $\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \lambda^k$ und $\mathfrak{d}\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \mathfrak{d}\lambda^k$ die Transformationsformeln der Klammern $\left\{ {p\,q \atop i} \right\}$. Es ist

$$d\bar{\lambda}^i + \overline{\left\{ {p\,q \atop i} \right\}}\, \bar{\lambda}^p\, d\bar{x}_q = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k}\left[d\lambda^k + \left\{ {p\,q \atop k} \right\} \lambda^p\, dx_q\right],$$

aber andrerseits auch

$$d\bar{\lambda}^i = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} d\lambda^k + \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} \lambda^k\, dx_l,$$

woraus wegen der Willkür der Vektoren $\lambda^k$ und $dx_l$

$$-\overline{\left\{ {p\,q \atop i} \right\}} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_q}{\partial x_l} = \frac{\partial^2 \bar{x}_i}{\partial x_k \partial x_l} - \left\{ {k\,l \atop r} \right\} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_r} = \frac{\mathfrak{d}^2 \bar{x}_i}{\mathfrak{d} x_k\, \mathfrak{d} x_l} \tag{20}$$

folgt. Soll daher in $P_0$ das System $\bar{x}_i$ geodätisch sein, so muß $\overline{\left\{ {p\,q \atop i} \right\}}$ in $P_0$ und daher auch die linke Seite von (20) in $P_0$ verschwinden; verschwindet umgekehrt die linke Seite von (20) für alle Kombinationen $k, l$, so ist wegen $\left|\frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_k}\right| \neq 0$ auch $\overline{\left\{ {p\,q \atop i} \right\}} = 0$ in $P_0$. *Also ist*

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \bar{x}_i}{\mathfrak{d} x_i\, \mathfrak{d} x_k} = 0 \tag{21}$$

*in $P_0$ notwendig und hinreichend, damit das System $\bar{x}_i$ in $P_0$ geodätisch ist.* Geometrisch bedeutet das, daß die $n$ Koordinatenhyperflächen $F_{n-1}$

$$\bar{x}_i^0 - \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{22}$$

in $P_0$ geodätisch sind, und zwar liegt insbesondere die reduzierte Darstellung der in $P_0$ geodätischen $F_{n-1}$ vor.

In derselben Art, wie wir oben eine in $P_0$ geodätische $F_{n-1}$ konstruierten, erhalten wir die einfachste Transformation (19) in ein in $P_0$ geodätisches Koordinatensystem in der Form

$$\bar{x}_i - \bar{x}_i^0 = a_{ik}(x_k - x_k^0) + \frac{1}{2}\left\{\begin{matrix} k\,l \\ r \end{matrix}\right\}_0 a_{ir}(x_k - x_k^0)(x_l - x_l^0), \tag{23}$$

wo die $a_{ik}$ konstant und die Determinante $|a_{ik}| \neq 0$ ist.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine Transformation (19) mit der Eigenschaft zu finden, daß das neue Koordinatensystem $\bar{x}_i$ *längs der Kurve* $C$

$$x_i = \alpha_i(s) \tag{24}$$

*geodätisch ist*[1]); $s$ sei dabei wieder die Bogenlänge auf $C$. Es muß dann für die Funktionen $\bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$ in (19)

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \bar{x}_i}{\mathfrak{d} x_k \, \mathfrak{d} x_l} = 0 \tag{25}$$

in allen Punkten von $C$ gelten. Betrachten wir die einparametrige Schar von $F_{n-1}$ ($i$ festgehalten)

$$\bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_i, \tag{26}$$

so ist

$$_{(i)}p_k = \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \tag{27}$$

der kovariante Normalenvektor dieser $F_{n-1}$-Schar. Längs $C$ gilt wegen (25)

$$\frac{\mathfrak{d}\, _{(i)}p_k}{\mathfrak{d} s} = \frac{\mathfrak{d}\, _{(i)}p_k}{\mathfrak{d} x_l}\frac{d x_l}{d s} = \frac{\mathfrak{d}^2 \bar{x}_i}{\mathfrak{d} x_k \, \mathfrak{d} x_l}\frac{d x_l}{d s} = 0, \tag{28}$$

*also ist der Normalenvektor* (27) *ein längs $C$ parallel verschobener Vektor.* Aus (25) folgt ferner, daß *jede $F_{n-1}$ der Schar* (26) *im Punkt $x_i(s)$ geodätisch ist.* Zur Konstruktion des gesuchten Koordinatensystems haben wir, wie jetzt gezeigt wird, nur $n$ derartige $F_{n-1}$-Scharen ($i = 1, \ldots, n$) aufzustellen.

Zum Beweise sei $p_i(s)$ ein längs $C$ parallelverschobener Vektor, so daß

$$p_i' - \left\{\begin{matrix} i\,k \\ r \end{matrix}\right\} p_r \alpha_k' = 0 \tag{29}$$

ist. Als *wesentliche* Einschränkung gelte noch

$$p_i \alpha_i' \neq 0, \tag{30}$$

d. h. $p_i$ sei in keinem Punkte des betrachteten Kurvenstückes $C$ ein Normalenvektor desselben. In jedem Punkt $P$ von $C$ konstruieren wir dann eine in $P$ geodätische $F_{n-1}$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi, \tag{31}$$

1) Die Existenz solcher längs einer Kurve geodätischer Koordinatensysteme wurde zuerst von FERMI nachgewiesen; vgl. T. LEVI-CIVITA, *Der absolute Differentialkalkül* (Berlin 1928), S. 84.

deren Normalenvektor in $P$ der Vektor $p_i$ ist. In allen Punkten von $C$ ist dann

(32) $$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_i \, \delta x_k} = a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

und

(33) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \pi p_i, \quad \pi \neq 0.$$

Durch eine geeignete Transformation $\Phi = \Phi(\varphi)$ können wir erreichen, daß $\pi = 1$ wird. In der Tat folgt aus (30) und (33) $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha_i' \neq 0$, d. h. $\frac{d\varphi}{ds} \neq 0$, so daß sich die Punkte von $C$ durch den Parameter $\varphi$ charakterisieren lassen; $\varphi = \varphi(s)$ ist dann nach $s$ auflösbar: $s = s(\varphi)$. Nun ist

(34) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \Phi' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \Phi' \pi p_i.$$

Setzt man

(35) $$\Phi(\varphi) = \int^{\varphi} \frac{d\varphi}{\pi(\varphi)},$$

so ist $\Phi' = \frac{1}{\pi}$, also, wie behauptet, $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = p_i$. Wir schreiben wieder $\varphi$ statt $\Phi$, d. h. es sei bereits in (33) $\pi = 1$. Dann folgt aus (33) wegen (29)

(36) $$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_i \, \delta x_k} \alpha_k' = \frac{\delta p_i}{\delta s} = 0,$$

d. h. wegen (32)

(37) $$a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \alpha_k' + a_k \alpha_k' \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 0.$$

Da $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha_i' = p_i \alpha_i' \neq 0$ ist, kann man statt (37) auch

(38) $$a_i = \varrho \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$$

schreiben. Hier muß aber $\varrho = 0$ sein, da wegen (37) sonst $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \alpha_k' = 0$, also $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \alpha_i' = 0$ wäre in Widerspruch mit (30). Damit ist gezeigt, *daß* $a_i = 0$ *sein muß und daß längs* $C$ (an Stelle von (32) und (33))

(39) $$\frac{\delta^2 \varphi}{\delta x_i \, \delta x_k} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = p_i$$

*gilt.* Nehmen wir nun an Stelle des einen Vektors $p_i$ die $n$ Vektoren ${}_{(\alpha)}p_i$ eines längs $C$ parallelverschobenen $n$-Beins, wobei nur für alle Indizes $\alpha$

(40) $${}_{(\alpha)}p_i \alpha_i' \neq 0$$

sein muß, so erhalten wir $n$ Funktionen $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$, für die $\frac{\delta^2 \bar{x}_i}{\delta x_k \, \delta x_l} = 0$ ist in den Punkten von $C$, so daß dann $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$ ein in allen Punkten von $C$ geodätisches Koordinatensystem ist.

Es wird nützlich sein, dieses Verfahren nun rechnerisch genauer zu verfolgen.[1]) In

$$(41) \qquad \varphi(x_1, \ldots, x_n, s) = [x_i - \alpha_i(s)]\left[p_i(s) + \left\{ {ik \atop l} \right\}_s p_l(s)\, \frac{x_k - \alpha_k(s)}{2}\right]$$

haben wir eine einparametrige $F_{n-1}$-Schar, deren Einzelflächen in den Punkten von $C$ geodätisch sind. An der Stelle $x_i = \alpha_i(s)$, $s = s$ ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n, s) = 0$, aber wegen (30)

$$(42) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \alpha_i' p_i \neq 0 .$$

Somit kann man $\varphi(x_1, \ldots, x_n, s) = 0$ in einer Umgebung dieser Stelle nach $s$ auflösen:

$$(43) \qquad s = s(x_1, \ldots, x_n),$$

womit die Schar (31) gewonnen ist.[2]) Tragen wir (43) in (41) ein, so ergibt sich eine Identität in den $x_i$, aus der wir durch Differentiation nach $x_h$

$$(44) \qquad \begin{aligned} 0 \equiv \left(\delta_{ih} - \alpha_i' \frac{\partial s}{\partial x_h}\right)&\left[p_i + \frac{1}{2}\left\{ {ik \atop l} \right\}_s p_l (x_k - \alpha_k)\right] \\ &+ (x_i - \alpha_i)\left[p_i' \frac{\partial s}{\partial x_h} + \frac{1}{2}\left\{ {ik \atop l} \right\}_s p_l \left(\delta_{kh} - \alpha_k' \frac{\partial s}{\partial x_h}\right) + (x_k - \alpha_k) \ldots\right] \end{aligned}$$

erhalten. Längs $C$, wo $x_i = \alpha_i(s)$ ist, gilt daher

$$(45) \qquad p_h = \alpha_i' p_i \frac{\partial s}{\partial x_h}$$

in Übereinstimmung mit (33) $\left(\pi = \dfrac{1}{\alpha_i' p_i}\right)$. Wir differenzieren (44) nochmals nach $x_j$, berücksichtigen dabei aber nur die Glieder, die längs $C$ nicht verschwinden. Es folgt

$$(46) \qquad \left\{ \begin{aligned} 0 \equiv &- \alpha_i'' \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} p_i - \alpha_i' \frac{\partial^2 s}{\partial x_h \partial x_j} p_i + \left(\delta_{ih} - \alpha_i' \frac{\partial s}{\partial x_h}\right) p_i' \frac{\partial s}{\partial x_j} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\delta_{ih} - \alpha_i' \frac{\partial s}{\partial x_h}\right)\left(\delta_{kj} - \alpha_k' \frac{\partial s}{\partial x_j}\right)\left\{ {ik \atop l} \right\}_s p_l + \left(\delta_{ij} - \alpha_i' \frac{\partial s}{\partial x_j}\right) p_i' \frac{\partial s}{\partial x_h} \\ &+ \frac{1}{2}\left(\delta_{ij} - \alpha_i' \frac{\partial s}{\partial x_j}\right)\left(\delta_{kh} - \alpha_k' \frac{\partial s}{\partial x_h}\right)\left\{ {ik \atop l} \right\}_s p_l + \cdots \\ \equiv &- \alpha_i'' p_i \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} - \alpha_i' p_i \frac{\partial^2 s}{\partial x_h \partial x_j} - \alpha_i' p_i' \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} + A + \cdots, \end{aligned} \right.$$

wo

$$(47) \qquad \begin{aligned} A = p_h' \frac{\partial s}{\partial x_j} &+ \left[\left\{ {hj \atop l} \right\}_s p_l - \left\{ {hk \atop l} \right\}_s p_l \alpha_k' \frac{\partial s}{\partial x_j} - \left\{ {ij \atop l} \right\}_s p_l \alpha_i' \frac{\partial s}{\partial x_h} \right. \\ &\left. + \left\{ {ik \atop l} \right\}_s p_l \alpha_i' \alpha_k' \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j}\right] + p_j' \frac{\partial s}{\partial x_h} - \alpha_i' p_i' \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} \end{aligned}$$

---

1) Es handelt sich dabei in erster Linie um den Nachweis der Existenz der Schar (31).

2) Damit ist der erwähnte Nachweis geliefert; die weitere Rechnung bringt eigentlich keinerlei neue Einsichten.

oder wegen $p_i' = \left\{ {ik \atop l} \right\}_s p_l \alpha_k'$ und (45)

$$A = \left\{ {hj \atop l} \right\}_s p_l = \left\{ {hj \atop l} \right\}_s \alpha_i' p_i \frac{\partial s}{\partial x_l} \tag{48}$$

ist. An Stelle von (46) erhalten wir somit

$$0 \equiv \alpha_i' p_i \frac{\mathfrak{d}^2 s}{\mathfrak{d} x_h \mathfrak{d} x_j} + (\alpha_i' p_i)' \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} \tag{49}$$

in den Punkten von $C$. Ist $\alpha_i' p_i$ konstant, so ist $\frac{\mathfrak{d}^2 s}{\mathfrak{d} x_h \mathfrak{d} x_j} = 0$; andernfalls suchen wir eine Transformation $S = S(s)$, so daß $\frac{\mathfrak{d}^2 S}{\mathfrak{d} x_h \mathfrak{d} x_j} = 0$ wird. Aus $\frac{\partial S}{\partial x_h} = S' \frac{\partial s}{\partial x_h}$ und $\frac{\mathfrak{d}^2 S}{\mathfrak{d} x_h \mathfrak{d} x_j} = S'' \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j} + S' \frac{\mathfrak{d}^2 s}{\mathfrak{d} x_h \partial x_j}$ folgt

$$\frac{\mathfrak{d}^2 S}{\mathfrak{d} x_h \partial x_j} = \left[ S'' - \frac{(\alpha_i' p_i)'}{\alpha_i' p_i} S' \right] \frac{\partial s}{\partial x_h} \frac{\partial s}{\partial x_j}; \tag{50}$$

wir müssen daher nur

$$S = \int^s \alpha_i' p_i \, ds \tag{51}$$

setzen, damit $\frac{\mathfrak{d}^2 S}{\mathfrak{d} x_h \mathfrak{d} x_j} = 0$ wird. In Übereinstimmung mit (33), $\pi = 1$, ist dann auch $\frac{\partial S}{\partial x_h} = \alpha_i' p_i \frac{\partial s}{\partial x_h} = p_h$.

## § 4. Ebenen im $R_n$. Räume konstanter Krümmung.

Wir definieren: *Eine $l$dimensionale Hyperfläche $F_l$ des $R_n$ heißt Ebene (und wird dann mit $E_l$ bezeichnet), wenn sie jede Raumgeodätische (Geodätische des $R_n$) ganz enthält, mit der sie ein Linienelement (Punkt und Richtung) gemeinsam hat.* Mit dieser auch inhaltlich äquivalent ist die folgende Definition:

*Eine $F_l$ des $R_n$ ist eine Ebene $E_l$, wenn jede Flächengeodätische (Geodätische der $F_l$) zugleich Raumgeodätische ist.* Daß jede in der $F_l$ liegende Raumgeodätische zugleich Flächengeodätische ist, folgt aus der Definition der Geodätischen als Extremalen (V, § 2). Durch ein Linienelement der $F_l$ ist eindeutig eine Flächengeodätische und eine Raumgeodätische bestimmt; sind die beiden identisch, so enthält die $F_l$ die ganze Raumgeodätische und umgekehrt.

Daraus folgt, daß die erste Raumkrümmung aller Geodätischen einer $E_l$ verschwindet; somit ist *eine $E_l$ in jedem ihrer Punkte geodätisch* (§ 3). Ist umgekehrt eine $F_l$ in allen Punkten geodätisch, so haben alle Flächengeodätischen in jedem Punkt die erste Raumkrümmung Null und sind somit zugleich Raumgeodätische. Also: *Eine $F_l$ ist dann und nur dann eine Ebene $E_l$, wenn sie in allen Punkten geodätisch ist.*

Ist (vgl. § 3)

(1) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0,$$

wo $\varphi$ zweimal stetig differenzierbar ist, die Gleichung einer $E_{n-1}$, so gilt in allen Punkten der $E_{n-1}$

(2) $$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_k} = a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i},$$

und umgekehrt folgt aus dem Bestehen von (2) in den Punkten von (1), daß die $F_{n-1}$ (1) eine Ebene ist. Erweitern wir die Definition von $a_i$ über das Gebiet (1) hinaus, so können wir an Stelle von (2) auch

(3) $$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_k} = a_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + a_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + A_{ik}$$

schreiben, wo

(3′) $$A_{ik}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

ist in allen Punkten der $E_{n-1}$ (1); $a_i$ kann dabei stets als stetig angenommen werden.

Wir geben nun eine zweite Definition der Ebenen $E_l$: *Eine Hyperfläche $F_l$ des $R_n$ ist eine Ebene $E_l$, wenn sie dauernd jeden Vektor enthält, der aus einer beliebigen, der $F_l$ angehörenden Anfangslage durch Parallelverschiebung längs einer beliebigen Kurve der $F_l$ entsteht.*

Die Äquivalenz der beiden Definitionen weisen wir für die $E_{n-1}$ nach; sofern eine $E_l$ als Schnitt mehrerer $E_{n-1}$ erhalten werden kann, sind die Definitionen auch im allgemeinen Fall äquivalent.[1]) Sei also (1) die Gleichung einer $E_{n-1}$ nach der zweiten Definition und $x_i, \lambda^i$ ein beliebiger in der $E_{n-1}$ liegender Vektor. Dann gilt

(4) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \frac{\partial \varphi(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \lambda^i = 0.$$

Ferner sei $x_i = x_i(s)$ eine beliebige, den Punkt $x_i$ enthaltende Kurve $C$ der $E_{n-1}$, für die also

(5) $$\varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s)) \equiv 0$$

(identisch in $s$) gilt. Der aus $x_i, \lambda^i$ durch Parallelverschiebung längs $C$ entstehende Vektor $x_i(s), \lambda^i(s)$ liegt dann definitionsgemäß dauernd in der $E_{n-1}$, so daß

(6) $$\frac{\partial \varphi(x_1(s), \ldots, x_n(s))}{\partial x_i} \lambda^i(s) \equiv 0$$

ist. Durch absolute Differentiation von (6) nach $s$ folgt wegen $\frac{\mathfrak{d} \lambda^i}{\mathfrak{d} s} = 0$

(7) $$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_k} \lambda^i d x_k = 0,$$

---

1) In VII, § 2 geben wir übrigens auch einen direkten Nachweis.

und zwar gilt diese Relation für den beliebigen Vektor $\lambda^i$ und die beliebige Richtung $dx_i$ der $E_{n-1}$, d. h. (7) ist eine Folge von

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\lambda^i = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx_i = 0. \tag{8}$$

Um so mehr gelten (für $\lambda^i = dx_i$) die charakteristischen Relationen (3, 10), d. h. die $E_{n-1}$ ist in der Tat in allen Punkten geodätisch, also eine $E_{n-1}$ auch nach der ersten Definition.

Sei jetzt, zum Nachweis der Umkehrung, (1) eine $E_{n-1}$ nach der ersten Definition, für die also die charakteristischen Relationen (3) und (3′) gelten. In dieser $E_{n-1}$ liege der Vektor $x_i, \lambda^i$ und die stetig differenzierbare Kurve $C$, $x_i = x_i(s)$, längs der der Vektor parallelverschoben werde. Der Ausgangsvektor ($s = 0$) liege in der $E_{n-1}$, so daß, wenn wir

$$f(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\lambda^i(s) \tag{9}$$

setzen, $f(0) = 0$ ist. Durch absolute Differentiation von (9) nach $s$ folgt wegen (3) und $\frac{\mathfrak{d}\lambda^i}{\mathfrak{d}s} = 0$

$$f'(s) = \frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_i\,\mathfrak{d}x_k}\lambda^i x_k' = a_i\lambda^i\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}x_k' + a_k x_k' f(s) + A_{ik}(s)\lambda^i x_k'. \tag{10}$$

Wegen (5) verschwindet $\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}x_k'$ und wegen (3′) auch $A_{ik}(s)$ und es bleibt

$$f'(s) = a_k x_k' f(s). \tag{11}$$

Da die rechte Seite eine stetige Funktion von $s$ ist, gibt es zu gegebenen Anfangswerten nur eine einzige Lösung dieser Differentialgleichung, zu den Anfangswerten $f(0) = 0$ insbesondere nur die eine Lösung $f(s) \equiv 0$.[1]) Somit ist nach (9)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\lambda^i = 0, \tag{12}$$

w. z. b. w.

Eine einfache Folgerung aus der zweiten Ebenendefinition ist: *Der normierte Normalenvektor einer $E_{n-1}$ ist ein längs jeder Kurve der $E_{n-1}$ parallelverschobener Vektor.* Verschiebt man nämlich ein normiertes $n$-Bein längs einer Kurve $C$ der $E_{n-1}$ parallel, dessen $n-1$ erste Vektoren (in einer Zwischenlage und daher) immer der $E_{n-1}$ angehören, so fällt der $n$te Vektor stets in die Richtung der Flächennormalen.

Für eine Transformation des *euklidischen* $R_n$, die von allgemeinen zu kartesischen Koordinaten[2]) führt, $\bar{x}_i = \bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n)$, gilt

$$\frac{\mathfrak{d}^2\bar{x}_i}{\mathfrak{d}x_k\,\mathfrak{d}x_l} = 0. \tag{13}$$

1) Die Gleichung (11) läßt sich ja auch unmittelbar integrieren.

2) Solche sind in *jedem* Punkt des $R_n$ geodätisch.

Die Einzelflächen jeder der $n$ Scharen $\bar{x}_i(x_1, \ldots, x_n) = \bar{x}_i$ sind also Ebenen $E_{n-1}$. Wir hatten sie in (1, 17) in der Form

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \int \lambda_i \, d x_i \tag{14}$$

dargestellt, wo $\lambda_i$ ein eindeutig parallelverschobener Vektor des $R_n$ ist. Eine $F_{n-1}$ (14) ist aber wegen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \lambda_i, \quad \frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \, \mathfrak{d} x_k} = \frac{\mathfrak{d} \lambda_i}{\mathfrak{d} x_k} = 0 \tag{15}$$

*immer, d. h. auch in nicht euklidischen Räumen, eine Ebene $E_{n-1}$, wenn nur $\lambda_i$ ein eindeutig parallelverschobener Vektor ist.* Über RIEMANNsche Räume, in denen eindeutig parallelverschobene Vektoren oder Vektorräume existieren, vgl. § 5.

Die *Riemannschen Räume konstanter Krümmung* lassen sich durch ihre Ebeneneigenschaften in einfacher Weise charakterisieren. Wir betrachten das System totaler Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} d\varphi &= p_k \, d x_k \\ \mathfrak{d} p_i &= -K \varphi \, g_{ik} \, d x_k, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

wo $K$ eine Konstante ist. *Dieses System ist im $R_n$ mit der konstanten Krümmung $K$ vollständig integrierbar.* Gemäß einer Bemerkung, die wir im Anschluß an die Formel (2, 9) machten, sind nämlich

$$\frac{\partial^2 p_k}{\partial x_j \, \partial x_i} - \frac{\partial^2 p_k}{\partial x_i \, \partial x_j} = \frac{\mathfrak{d}^2 p_k}{\mathfrak{d} x_j \, \mathfrak{d} x_i} - \frac{\mathfrak{d}^2 p_k}{\mathfrak{d} x_i \, \mathfrak{d} x_j} - R^{r}_{\cdot\, kij} \, p_r = 0 \tag{17}$$

die nicht trivialen Integrabilitätsbedingungen von (16), die wegen

$$\frac{\mathfrak{d} p_k}{\mathfrak{d} x_i} = -K g_{ik} \varphi, \quad \frac{\mathfrak{d}^2 p_k}{\mathfrak{d} x_j \, \mathfrak{d} x_i} = -K g_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = -K g_{ik} p_j \tag{18}$$

ausfuhrlicher

$$p_r \left[ -K (g_{ki} \delta^r_j - g_{kj} \delta^r_i) + R^{r}_{\cdot\, kji} \right] = 0 \tag{19}$$

lauten. Nun gilt nach (2, 21) im $R_n$ konstanter Krümmung $K$

$$R^{r}_{\cdot\, kji} = K (g_{ki} \delta^r_j - g_{kj} \delta^r_i), \tag{20}$$

also ist in einem solchen $R_n$ (19) in der Tat identisch erfüllt. Es gibt dann zu beliebig vorgegebenen Anfangswerten $x^0_i, \varphi^0, p^0_i$ stets eine Lösung

$$\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n), \quad p_i = p_i(x_1, \ldots, x_n) \tag{21}$$

von (16), die diesen Anfangswerten genügt. Die Flächen $F_{n-1}$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi \tag{22}$$

genügen dabei dem zu (16) äquivalenten System

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \, \mathfrak{d} x_k} = -K g_{ik} \varphi. \tag{23}$$

Wählen wir den einen Anfangswert $\varphi^0 = 0$, so ist die entsprechende $F_{n-1}$ nach (23) eine Ebene $E_{n-1}$. Somit gilt:

*In Räumen konstanter Krümmung gibt es in jedem Punkt und in jeder Orientierung*[1]) *Ebenen* $E_{n-1}$.

Wir zeigen noch, *daß auch umgekehrt ein* $R_n$, *der in jedem Punkt und in jeder Orientierung Ebenen* $E_{n-1}$ *enthält, notwendig ein* $R_n$ *konstanter Krümmung ist.* Dabei nehmen wir $n > 2$ an. Bilden die drei Vektoren $v^i$, $w^i$ und $\lambda^i$ ein normiertes Dreibein eines Punktes $P$, so gibt es voraussetzungsgemäß eine $E_{n-1}$, die durch $P$ geht, in $P$ den Normalenvektor $\lambda^i$ hat und deren Tangentenraum in $P$ dann die Vektoren $v^i$ und $w^i$ enthält. In der $E_{n-1}$ legen wir durch $P$ eine zweidimensionale Fläche $F_2$, deren Tangentenraum in $P$ durch die beiden Vektoren $v^i$ und $w^i$ aufgespannt wird, und ziehen in dieser $F_2$ eine durch $P$ gehende geschlossene Kurve $C$. Verschieben wir längs dieser Kurve den Vektor $\lambda^i$ parallel (von $P$ nach $P$), so fallen Anfangs- und Endlage zusammen, da $\lambda^i$ der Normalenvektor und $C$ eine Kurve der $E_{n-1}$ ist. Nach (2, 49) ist dann

(24) $$R^i_{.jlk}\lambda^j v^l w^k = 0.$$

Diese Relation hat im ganzen $R_n$ zu gelten, wenn nur

(25) $$v_i\lambda^i = w_i\lambda^i = 0$$

ist, d. h. (24) ist eine Folge von (25). Dabei ist die ursprüngliche Annahme, daß $v_i$ und $w_i$ ein normiertes Zweibein bilden, unwesentlich.

Aus (24) und (25) läßt sich nun ohne Schwierigkeit die Konstanz der Raumkrümmung nachweisen. Der Tensor

(26) $$R_{ijlk}v^l w^k = T_{ij}(v, w)$$

habe in einem $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ die Darstellung

(27) $$T_{ij}(v, w) = {}_{(\alpha\beta)}T(v, w)\,{}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(\beta)}\lambda_j.$$

Bezeichnen wir das zu ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ adjungierte $n$-Bein mit ${}_{(\alpha)}\mu^i$, so gilt bekanntlich

(28) $${}_{(\alpha\beta)}T(v, w) = T_{ij}(v, w)\,{}_{(\alpha)}\mu^i\,{}_{(\beta)}\mu^j = -{}_{(\beta\alpha)}T(v, w).$$

Wir setzen nun ${}_{(1)}\lambda_i = v_i$, ${}_{(2)}\lambda_i = w_i$ und wählen ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 3, \ldots, n)$ als normiertes $n-2$ Bein, das den Normalvektorraum von $v_i$ und $w_i$ aufspannt. Dann ist ${}_{(\alpha)}\lambda^i = {}_{(\alpha)}\mu^i$ $(\alpha = 3, \ldots, n)$, und es gilt wegen (24) und (25)

(29) $${}_{(\alpha\beta)}T(v, w) = R_{ijlk}\,{}_{(1)}\lambda^l\,{}_{(2)}\lambda^k\,{}_{(\alpha)}\mu^i\,{}_{(\beta)}\mu^j = 0 \qquad (\alpha \text{ oder } \beta = 3, \ldots, n).$$

An Stelle von (27) tritt somit

(30) $$T_{ij}(v, w) = A(v, w)(v_i w_j - w_i v_j),$$

1) D. h. mit gegebener Normalen $p_i^0$ in dem gegebenen Punkt.

wo zur Abkürzung $A(v, w)$ statt ${}_{(12)}T(v, w)$ gesetzt ist, oder

$$R_{ijlk} v^l w^k = A(v, w)(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) v^l w^k. \tag{31}$$

Wir zeigen nun, daß $A(v, w)$ von $v^i$ und $w^i$ unabhängig ist. Wir differenzieren (31) nach $v^r$ und erhalten

$$R_{ijrk} w^k = \frac{\partial A}{\partial v^r}(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}) v^l w^k + A(v, w)(g_{ir} g_{jk} - g_{ik} g_{jr}) w^k. \tag{32}$$

Durch Überschiebung mit $v^i w^j$ folgt

$$\begin{aligned} R_{ijrk} w^k v^i w^j = \frac{\partial A}{\partial v^r}[(v_i v^i)(w_i w^i) - (v_i w^i)^2] \\ + A(v, w)(g_{ir} g_{jk} - g_{ik} g_{jr}) w^k v^i w^j. \end{aligned} \tag{33}$$

Wegen $R_{ijrk} = R_{rkij}$ und (31) ist die linke Seite gleich

$$A(v, w)(g_{ri} g_{kj} - g_{rj} g_{ki}) v^i w^j w^k.$$

Da ferner für unabhängige Vektoren $v_i$ und $w_i$ stets $(v_i v^i)(w_i w^i) - (v_i w^i)^2 > 0$ ist, folgt aus (33)

$$\frac{\partial A(v, w)}{\partial v^r} = 0. \tag{34}$$

Ebenso zeigt man, daß $A(v, w)$ von $w^i$ nicht abhängt. Aus (31) folgt daher, da die Vektoren $v^i$ und $w^i$ willkürlich waren,

$$R_{ijlk} = A(g_{il} g_{jk} - g_{ik} g_{jl}), \tag{35}$$

d. h. der $R_n$ hat die konstante Krümmung $A$, w. z. b. w.

Zum Schluß noch eine Bemerkung über die Flächenschar (22). Wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right) &= g^{ik}\left(\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_l} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_k \mathfrak{d} x_l} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) \\ &= -2K\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}(-K\varphi^2) \end{aligned} \tag{36}$$

gilt für sie

$$g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = -K\varphi^2 + K_1, \tag{37}$$

wo $K_1$ eine zweite Konstante ist. Betrachten wir zunächst den Spezialfall $K = 0$, $K_1 = 1$. Über den $R_n$ machen wir dabei weiter keine Voraussetzungen.[1]) Dann ist

$$g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 1. \tag{38}$$

Wir zeigen, *daß die Orthogonaltrajektorien einer Schar* (22), *für die* (38) *gilt, Geodätische des $R_n$ sind und daß die geodätischen Bogen, die von je zwei Flächen*

1) D. h. wir untersuchen eine Lösung $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ der partiellen Differentialgleichung (37) in irgendeinem Riemannschen $R_n$.

*der Schar auf den Orthogonaltrajektorien abgeschnitten werden, gleiche Länge haben.* Die Flächen der Schar werden demgemäß auch als *Flächen gleichen Abstandes* oder als *geodätische Parallele* bezeichnet. Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{ds} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} \tag{39}$$

definiert die auf ihre Bogenlänge bezogenen Orthogonaltrajektorien $x_i = x_i(s)$, denn links steht der normierte Tangentenvektor, rechts der wegen (38) ebenfalls normierte Normalenvektor der $F_{n-1}$ mit der Gleichung $\varphi =$ konst. Durch absolute Differentiation von (39) folgt

$$\begin{aligned}\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} s^2} &= g^{ik}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_k\mathfrak{d}x_l}\frac{dx_l}{ds} = g^{ik}g^{lh}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_k\mathfrak{d}x_l}\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\\ &= \frac{1}{2}g^{ik}\left(g^{lh}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_k\mathfrak{d}x_l}\frac{\partial\varphi}{\partial x_h} + g^{lh}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_k\mathfrak{d}x_h}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\right) = \frac{1}{2}g^{ik}\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d}x_k}\left(g^{lh}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}\frac{\partial\varphi}{\partial x_h}\right) = 0,\end{aligned} \tag{40}$$

also ist die Orthogonaltrajektorie in der Tat eine Geodätische. Längs einer solchen berechnen wir nun

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = 1, \tag{41}$$

also ist

$$\varphi = s + \text{konst.}, \tag{42}$$

womit unsere Behauptung vollständig bewiesen ist.

Die allgemeineren Scharen, für die (37) mit beliebigen Konstanten $K$ und $K_1$ gilt, lassen sich durch eine Transformation $\Phi = \Phi(\varphi)$ leicht so darstellen, daß wieder die speziellere Relation (38) gilt. Schreiben wir (37) in der allgemeinsten Form

$$g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = F(\varphi), \tag{43}$$

so wird wegen

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \Phi'\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \tag{44}$$

$$g^{ik}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = (\Phi')^2 F(\varphi). \tag{45}$$

Setzen wir

$$\Phi(\varphi) = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{F(\varphi)}} \tag{46}$$

(der Radikand ist nach (43) wesentlich positiv), so folgt

$$g^{ik}\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k} = 1. \tag{47}$$

*Eine Lösung* (22) *von* (23) *besteht also stets aus einer Ebene* $E_{n-1}$ ($\varphi = 0$) *und geodätisch parallelen* $F_{n-1}$, die, wie wir in VII, § 3 zeigen werden, *Flächen konstanter Relativkrümmung* sind.

## § 5. Eindeutig parallelverschobene Vektorräume im Riemannschen $R_n$.

Im $R_n$ sei ein eindeutig parallelverschobener Vektorraum $V^{(r)}$ gegeben, der durch das normierte $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ $(\alpha = 1,\ldots,r)$ aufgespannt werde. Für den Projektionstensor (III, § 2) $p^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda^i\, {}_{(\alpha)}\lambda^k$ gilt dann $\mathfrak{d}\, p^{ik} = 0$ oder

$$(1)\qquad {}_{(\alpha)}\lambda^i \frac{\mathfrak{d}\, {}_{(\alpha)}\lambda^k}{\mathfrak{d}\, x_h} + {}_{(\alpha)}\lambda^k \frac{\mathfrak{d}\, {}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d}\, x_h} = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

Ergänzen wir das $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ zu einem normierten $n$-Bein, so gilt die Darstellung (vgl. III, § 1)

$$(2)\qquad \frac{\mathfrak{d}\, {}_{(\alpha)}\lambda^k}{\mathfrak{d}\, x_h} = {}_{(\alpha\beta)}C_h\, {}_{(\beta)}\lambda^k \qquad (\alpha = 1, \ldots, r,\ \beta = 1, \ldots, n),$$

und aus (1) folgt

$$(3)\qquad {}_{(\alpha)}\lambda^i\, {}_{(\alpha\beta)}C_h\, {}_{(\beta)}\lambda^k + {}_{(\alpha)}\lambda^k\, {}_{(\alpha\beta)}C_h\, {}_{(\beta)}\lambda^i = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, r,\ \beta = 1, \ldots, n).$$

Da die Vektoren ${}_{(\gamma)}\lambda^i$ $(\gamma = 1, \ldots, n)$ linear unabhängig sind, muß

$$(4)\qquad {}_{(\alpha)}\lambda^k\, {}_{(\alpha\beta)}C_h = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r,\ \beta = r+1, \ldots, n)$$

und aus demselben Grunde

$$(5)\qquad {}_{(\alpha\beta)}C_h = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r;\ \beta = r+1, \ldots, n)$$

sein. Aus (2) und (5) folgt

$$(6)\qquad \frac{\mathfrak{d}\, {}_{(\alpha)}\lambda^k}{\mathfrak{d}\, x_h} = {}_{(\alpha\beta)}C_h\, {}_{(\beta)}\lambda^k \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$$

*für jedes einen eindeutig parallelverschobenen $V^{(r)}$ aufspannende normierte $r$-Bein; umgekehrt folgt aus (6) wegen ${}_{(\alpha\beta)}C_h = -{}_{(\beta\alpha)}C_h$, daß $\mathfrak{d}\, p^{ik} = 0$ ist.*[1])

Wir beweisen nun den folgenden Satz:

*Der Projektionstensor $p_{ik}$ eines eindeutig parallelverschobenen Vektorraumes $V^{(r)}$ ist insofern der allgemeinste eindeutig parallelverschobene symmetrische Tensor zweiter Stufe, als sich jeder derartige Tensor $a_{ik}$ als Summe eindeutig parallelverschobener Projektionstensoren $p_{ik}, q_{ik}, \ldots$ in der Form*

$$a p_{ik} + b q_{ik} + \cdots = a_{ik}$$

*mit konstanten $a, b, \ldots$ darstellen läßt.*

Der Tensor $a_{ik}$ genügt den Differentialgleichungen[2])

$$(7)\qquad \frac{\mathfrak{d}\, a_{ik}}{\mathfrak{d}\, x_j} = 0.$$

---

1) Man zeige, daß sich zu jedem eindeutig parallelverschobenen $V^{(r)}$ Hyperflächen $F_r$ angeben lassen, deren Tangentenraum der $V^{(r)}$ ist. Diese $F_r$ sind dann nach der zweiten Definition von § 4 Ebenen $E_r$. (Man zeigt dabei, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}\, {}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ ein vollständiges System ist.)

2) Um Lösungstensoren von (7) zu finden, hat man das System totaler Differentialgleichungen

$$(\mathrm{I})\qquad d a_{ik} = \left[ \begin{Bmatrix} i\,j \\ r \end{Bmatrix} a_{rk} + \begin{Bmatrix} k\,j \\ r \end{Bmatrix} a_{ir} \right] d x_j$$

Da $g_{ik}$ positiv definit ist, existieren in einem beliebigen Punkt $P$ des $R_n$ die Beindarstellungen *(Hauptachsentransformation)*

(8) $$g_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k$$

und

(9) $$a_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_{(\alpha)}\mu\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k,$$

wo die ${}_{(\alpha)}\mu_i$ ein normiertes $n$-Bein bilden und die ${}_{(\alpha)}\mu$ für den Tensor $a_{ik}$ charakteristische Invarianten sind. Wir verbinden den Punkt $P$ durch zwei Bogen $C$ und $C'$ mit einem zweiten Punkt $Q$ und verschieben das normierte $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ sowohl längs $C$ als auch längs $C'$ parallel nach $Q$; in der Endlage $Q$ erhalten wir dann zwei im allgemeinen verschiedene $n$-Beine, die mit ${}_{(\alpha)}\mu_i$ und ${}_{(\alpha)}\nu_i$ bezeichnet seien. Da $a_{ik}$ und $g_{ik}$ parallelverschobene Tensoren sind, gelten die Darstellungen (8) und (9) längs $C$ und $C'$ mit konstanten ${}_{(\alpha)}\mu$. Insbesondere ist in $Q$

(10) $$g_{ik} = {}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k = {}_{(\alpha)}\nu_i\,{}_{(\alpha)}\nu_k$$

und

(11) $$a_{ik} = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_{(\alpha)}\mu\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\alpha)}\mu_k = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_{(\alpha)}\nu\,{}_{(\alpha)}\nu_i\,{}_{(\alpha)}\nu_k$$

mit ${}_{(\alpha)}\mu = {}_{(\alpha)}\nu$. Zwischen den beiden wegen (10) normierten $n$-Beinen ${}_{(\alpha)}\mu_i$ und ${}_{(\alpha)}\nu_i$ in $Q$ bestehen die Relationen

(12) $${}_{(\alpha)}\nu_i = {}_{(\alpha\beta)}c\,{}_{(\beta)}\mu_i$$

einer orthogonalen Transformation. Durch Überschiebung von (12) mit ${}_{(\gamma)}\mu^i$ folgt wegen ${}_{(\beta)}\mu_i\,{}_{(\gamma)}\mu^i = \delta_{\beta\gamma}$

(13) $${}_{(\alpha\beta)}c = {}_{(\alpha)}\nu_i\,{}_{(\beta)}\mu^i$$

und durch Überschiebung von (11) mit ${}_{(\beta)}\nu^k$ wegen ${}_{(\alpha)}\nu_k\,{}_{(\beta)}\nu^k = \delta_{\alpha\beta}$

(14) $$\sum_{\alpha=1}^{n} {}_{(\alpha)}\mu\,{}_{(\alpha)}\mu_i\,{}_{(\beta\alpha)}c = {}_{(\beta)}\nu\,{}_{(\beta)}\nu_i, \qquad \text{(nicht summieren über } \beta!)$$

---

ebenso zu behandeln, wie wir in § 1 das System

$$d\lambda^i = -\left\{ {p\,q \atop i} \right\} \lambda^p dx_q$$

behandelten, um die eindeutig parallelverschobenen Vektoren eines gegebenen $R_n$ wirklich zu berechnen. Es sind also die Integrabilitätsbedingungen von (I) aufzustellen, und dieses System von Gleichungen für die $x_1, \ldots, x_n, \ldots, a_{ik}, \ldots$ ist so lange zu „erweitern", als diese Erweiterung neue Relationen liefert. Jedem Wertsystem $x_1, \ldots, x_n, \ldots, a_{ik}, \ldots$, das dem so entstandenen Gleichungssystem genügt, entspricht dann ein Lösungstensor von (I), der im Punkte $x_i$ die Werte $a_{ik}$ annimmt.

oder wegen (12)

$$(15)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n} {}_{(\alpha)}\mu\, {}_{(\alpha)}\mu_i\, {}_{(\beta\,\alpha)}c = \sum_{\alpha=1}^{n} {}_{(\beta)}\nu\, {}_{(\beta\,\alpha)}c\, {}_{(\alpha)}\mu_i, \qquad \text{(nicht summieren über } \beta\text{!).}$$

Wegen der Unabhängigkeit der $n$ Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ müssen in (15) die Koeffizienten der ${}_{(\alpha)}\mu_i$ alle verschwinden:

$$(16)\qquad {}_{(\alpha)}\mu\, {}_{(\beta\,\alpha)}c = {}_{(\beta)}\nu\, {}_{(\beta\,\alpha)}c, \qquad \text{(nicht summieren über } \alpha \text{ und } \beta\text{!).}$$

Ist nun ${}_{(\alpha)}\mu \neq {}_{(\beta)}\nu$, so muß nach (16)

$$(17)\qquad {}_{(\beta\,\alpha)}c = 0$$

sein. Es sind also in (12) nur jene Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ und ${}_{(\beta)}\nu_i$ miteinander verbunden, für die ${}_{(\alpha)}\mu = {}_{(\beta)}\nu$ ist. Die orthogonale Transformation (12) zerfällt somit in eine Anzahl von orthogonalen Teiltransformationen, von denen jede nur solche Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ und ${}_{(\beta)}\nu_i$ verknüpft, für die ${}_{(\alpha)}\mu = {}_{(\beta)}\nu$ ist. Ist z. B. (bei entsprechender Numerierung der Beinvektoren) ${}_{(1)}\mu = {}_{(2)}\mu = \cdots = {}_{(\varrho)}\mu$ die Gesamtheit aller Skalare ${}_{(\alpha)}\mu$, die gleich ${}_{(1)}\mu$ sind, so werden die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha = 1, \ldots, \varrho)$ und ${}_{(\alpha)}\nu_i$ $(\alpha = 1, \ldots, \varrho)$ durch eine orthogonale Transformation

$$(18)\qquad {}_{(\alpha)}\nu_i = {}_{(\alpha\,\beta)}c\, {}_{(\beta)}\mu_i \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, \varrho)$$

verbunden sein, und daher gilt

$$(19)\qquad \sum_{\alpha=1}^{\varrho} {}_{(\alpha)}\mu_i\, {}_{(\alpha)}\mu_k = \sum_{\alpha=1}^{\varrho} {}_{(\alpha)}\nu_i\, {}_{(\alpha)}\nu_k = p_{ik}.$$

Der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha = 1, \ldots, \varrho)$ aufgespannte Vektorraum ist daher eindeutig parallelverschoben. Der Tensor $a_{ik}$ hat somit die Gestalt

$$(20)\qquad a_{ik} = {}_{(1)}\mu\, p_{ik} + \cdots = a p_{ik} + b q_{ik} + \cdots,$$

w. z. b. w. *Damit also* (7) *eine von $g_{ik}$ verschiedene Lösung $a_{ik}$ hat, ist notwendig und hinreichend, daß es im $R_n$ eindeutig parallelverschobene Vektorräume gibt.*

Ist $V^{(r)}$ ein derartiger, durch das $r$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu_i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ aufgespannter Vektorraum, so ist sein Normalvektorraum $V^{(n-r)}$ ebenfalls ein eindeutig parallelverschobener Vektorraum. Ist $p_{ik}$ der Projektionstensor von $V^{(r)}$ und $q_{ik}$ der von $V^{(n-r)}$, so gilt

$$(21)\qquad g_{ik} = p_{ik} + q_{ik};$$

also ist

$$(22)\qquad a_{ik} = a p_{ik} + b q_{ik}$$

mit nicht verschwindenden Konstanten $a, b$ ein Lösungstensor von (7), dessen Matrix den Rang $n$ hat.[1]) Da $p^{ik} q_{ij} = 0$ ist, gilt

$$(23)\qquad g_{ik} g^{ij} = p_{ik} p^{ij} + q_{ik} q^{ij} = \delta^j_k.$$

1) Ist $a > 0$ und $b > 0$, so ist $a_{ik}$ ebenso wie $g_{ik}$ positiv definit.

Setzen wir

$$\tilde{a}^{ik} = \frac{1}{a} p^{ik} + \frac{1}{b} q^{ik}, \tag{24}$$

so ist

$$a_{ik}\tilde{a}^{ij} = \delta_k^j. \tag{25}$$

Aus (7) oder

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j} = \begin{Bmatrix} i\,j \\ r \end{Bmatrix} a_{rk} + \begin{Bmatrix} k\,j \\ r \end{Bmatrix} a_{ir} \tag{26}$$

folgt

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\right) = \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} a_{jr} \tag{27}$$

und daraus durch Überschiebung mit $\tilde{a}^{jl}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_j}\right) \tilde{a}^{jl} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}. \tag{28}$$

Die Klammern $\begin{Bmatrix} ik \\ l \end{Bmatrix}$, die den absoluten Differentialkalkül und die Parallelverschiebung im $R_n$ festlegen, können somit mit jedem eindeutig parallelverschobenen, nicht ausgearteten ($|a_{ik}| \neq 0$) symmetrischen Tensor $a_{ik}$ gebildet werden.

Der Riemannsche $R_n$, in dem eindeutig parallelverschobene Vektorräume existieren, läßt sich in geeigneten Koordinaten durch eine besondere Form des Maßtensors charakterisieren.

Es sei ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ ein normiertes, in allen Punkten des $R_n$ definiertes $n$-Bein, dessen $r$ erste Vektoren einen eindeutig parallelverschobenen $V^{(r)}$ und dessen $n-r$ letzte Vektoren den — dann ebenfalls eindeutig parallelverschobenen — Normalvektorraum $V^{(n-r)}$ des $V^{(r)}$ aufspannen. Wir betrachten dann die beiden wegen (6) vollständigen Systeme partieller Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r) \tag{29}$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = 0 \qquad (\alpha = r+1, \ldots, n). \tag{30}$$

Ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ ein System unabhängiger Lösungen von (30) und $\varphi_{r+1}, \ldots, \varphi_n$ ein ebensolches Lösungssystem von (29), *so sind die n Funktionen* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *unabhängig*, also ihre Funktionaldeterminante $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}\right| \neq 0$. Andernfalls wäre

$$A_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} = 0 \tag{31}$$

mit nicht durchwegs verschwindenden $A_\sigma$. Multiplizieren wir (31) mit ${}_{(\alpha)}\lambda^i$, so ergeben sich wegen $\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ $(\alpha = 1, \ldots, r;\ \sigma = r+1, \ldots, n)$ und $\frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = 0$ $(\alpha = r+1, \ldots, n;\ \sigma = 1, \ldots, r)$ die Relationen

$$\sum_{\sigma=1}^{r} A_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r \text{ oder } \alpha = r+1, \ldots, n). \tag{32}$$

Wegen der Unabhängigkeit der Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ muß also $\sum_{\sigma=1}^{r} A_\sigma \frac{\partial \varphi_\sigma}{\partial x_i} = 0$ sein, woraus wegen der Unabhängigkeit der $\varphi_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, r)$ weiter $A_\sigma = 0$ $(\sigma = 1, \ldots, r)$ folgt. Ebenso zeigt man $A_\sigma = 0$ $(\sigma = r+1, \ldots, n)$.

Wir können somit die

(33) $$\bar{x}_i = \varphi_i\,(x_1, \ldots, x_n)$$

als neue Koordinaten einführen, lassen aber die unbequemen Querstriche wieder weg, so daß (29) die unabhängigen Lösungen $x_{r+1}, \ldots, x_n$ und (30) die unabhängigen Lösungen $x_1, \ldots, x_r$ hat. Für das normierte $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ gilt somit

(34) $$\delta_{it}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = {}_{(\alpha)}\lambda^t = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r,\ t = r+1, \ldots, n)$$

(35) $$\delta_{is}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = {}_{(\alpha)}\lambda^s = 0 \qquad (\alpha = r+1, \ldots, n,\ s = 1, \ldots, r)$$

Aus $g^{ik} = {}_{(\alpha)}\lambda^i\,{}_{(\alpha)}\lambda^k$ folgt wegen (34) und (35)

(36) $$g^{ik} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r;\ k = r+1, \ldots, n)$$

und somit auch

(37) $$g_{ik} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r;\ k = r+1, \ldots, n).$$

In (vgl. (6))

(38) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda^k}{\mathfrak{d}\,x_p} = {}_{(\alpha\beta)}C_p\,{}_{(\beta)}\lambda^k \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, r)$$

sei $k = r+1, \ldots, n$ gesetzt. Da wegen (34) dann ${}_{(\beta)}\lambda^k = 0$ und $\frac{\partial\,{}_{(\alpha)}\lambda^k}{\partial x_p} = 0$ ist, gilt

(39) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda^k}{\mathfrak{d}\,x_p} = \left\{ {p\,q \atop k} \right\} {}_{(\alpha)}\lambda^q = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, r;\ k = r+1, \ldots, n).$$

Nun ist wegen (34) und $|\,{}_{(\alpha)}\lambda^q\,| \neq 0$ $(\alpha, q = 1, \ldots, n)$ auch $|\,{}_{(\alpha)}\lambda^q\,| \neq 0$ $(\alpha, q = 1, \ldots, r)$, also ist

(40) $$\left\{ {p\,q \atop k} \right\} = 0 \qquad (q = 1, \ldots, r;\ k = r+1, \ldots, n)$$

Aus

(41) $$\left\{ {p\,q \atop k} \right\} = \sum_{t=r+1}^{n} g^{kt} \left[ {p\,q \atop t} \right] = 0 \qquad (k = r+1, \ldots, n;\ q = 1, \ldots, r)$$

folgt wegen $|\,g^{kt}\,| \neq 0$ $(k, t = r+1, \ldots, n)$ weiter

(42) $$\left[ {p\,q \atop t} \right] = 0 \qquad (q = 1, \ldots, r;\ t = r+1, \ldots, n)$$

oder

(43) $$\frac{\partial g_{pt}}{\partial x_q} + \frac{\partial g_{tq}}{\partial x_p} - \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_t} = 0 \qquad (q = 1, \ldots, r;\ t = r+1, \ldots, n).$$

In (43) ist aber $g_{tq} = 0$, also bleibt

(44) $$\frac{\partial g_{pt}}{\partial x_q} = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_t} \qquad (q = 1, \ldots, r;\ t = r+1, \ldots, n).$$

Daraus folgt: Für $p = 1,\ldots,r$ ist $g_{pt} = 0$, also $\dfrac{\partial g_{pq}}{\partial x_t} = 0$, d. h.

(45) $$g_{pq} = g_{pq}(x_1, \ldots, x_r) \qquad (p, q = 1, \ldots, r);$$

für $p = r+1, \ldots, n$ ist $g_{pq} = 0$, also $\dfrac{\partial g_{pt}}{\partial x_q} = 0$, d. h.

(46) $$g_{pq} = g_{pq}(x_{r+1}, \ldots, x_n) \qquad (p, q = r+1, \ldots, n).$$

Für das quadrierte Bogenelement folgt daraus

(47) $$g_{ik}\,dx_i\,dx_k = \sum_{i,k=1}^{r} g_{ik}(x_1, \ldots, x_r)\,dx_i\,dx_k + \sum_{i,k=r+1}^{n} g_{ik}(x_{r+1}, \ldots, x_n)\,dx_i\,dx_k.$$

Ein derartiger $R_n$ ist eine Art „Produktraum" eines $R_r$ und eines $R_{n-r}$, wobei der $R_r$ im $R_n$ durch $x_i = $ konst. $(i = r+1,\ldots,n)$ und der $R_{n-r}$ durch $x_i =$ konst. $(i = 1,\ldots,r)$ gegeben ist. Beide sind im $R_n$ Ebenen $E_r$ bzw. $E_{n-r}$.

In einem $R_n$ mit dem Bogenelement (47) ist der Vektorraum $V^{(r)}$, der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i = \delta_{i\alpha}$ $(\alpha = 1,\ldots,r)$, und sein Normalvektorraum $V^{n-r}$, der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda^i = \delta_{i\alpha}$ $(\alpha = r+1,\ldots, n)$ aufgespannt ist, eindeutig parallelverschoben. In

(48) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda^k}{\mathfrak{d}x_p} = \sum_{\beta=1}^{n} {}_{(\alpha\beta)}C_p\,{}_{(\beta)}\lambda^k = {}_{(\alpha k)}C_p$$

verschwindet für $\alpha = 1, \ldots, r$; $k = r+1, \ldots, n$ die linke[1]) und somit auch die rechte Seite, also läuft für $\alpha = 1, \ldots, r$ der Summationsindex $\beta$ nur von 1 bis $r$, und es ist

(49) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda^k}{\mathfrak{d}x_p} = \sum_{\beta=1}^{r} {}_{(\alpha\beta)}C_p\,{}_{(\beta)}\lambda^k \qquad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

Der $V^{(r)}$ ist also ein eindeutig parallelverschobener Vektorraum, denn wenn (6) für ein den $V^{(r)}$ aufspannendes $r$-Bein gilt, so gilt (6) für jedes, also auch für ein normiertes solches $r$-Bein.

Ist $x_1, \ldots, x_n; \mu^1, \ldots, \mu^n$ ein in allen Punkten des $R_n$ definierter Vektor, so ordnen wir ihm im $R_r$: $x_i =$ konst. $(i = r+1,\ldots,n)$ den Vektor $x_1,\ldots,x_r; \mu^1,\ldots,\mu^r$ zu und im $R_{n-r}$: $x_i =$ konst. $(i = 1,\ldots,r)$ den Vektor $x_{r+1},\ldots,x_n; \mu^{r+1},\ldots,\mu^n$. Wegen (40) ist dann

(50) $$\frac{\mathfrak{d}\mu^i}{\mathfrak{d}x_p} = \frac{\partial \mu^i}{\partial x_p} + \sum_{q=1}^{r} \left\{ {pq \atop i} \right\} \mu^q \qquad (i, p = 1, \ldots, r)$$

und ebenso gilt

(51) $$\frac{\mathfrak{d}\mu^i}{\mathfrak{d}x_p} = \frac{\partial \mu^i}{\partial x_p} + \sum_{q=r+1}^{n} \left\{ {pq \atop i} \right\} \mu^q \qquad (i, p = r+1, \ldots, n),$$

1) Da dann (42) und weiter (40) gilt.

d. h. die absolute Ableitung des Vektors $x_1, \ldots, x_r; \mu^1, \ldots, \mu^r$ des $R_r$ ist das Teilsystem der absoluten Ableitung $\frac{\mathfrak{d}\mu_i}{\mathfrak{d}x_p}$ des Vektors $x_1, \ldots, x_n; \mu^1, \ldots, \mu^n$ des $R_n$ für $i, p = 1, \ldots, r$ und entsprechendes gilt nach (51) für die Vektoren des $R_{n-r}$.

Gibt es im $R_n$ noch einen weiteren eindeutig parallelverschobenen Vektorraum $V^{(t)}$, der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu^i$ $(\alpha = 1, \ldots, t)$ aufgespannt sei, so gilt, gleichgültig, ob das $t$-Bein ${}_{(\alpha)}\mu^i$ normiert ist oder nicht, analog zu (6)

$$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\mu^i}{\mathfrak{d}x_p} = {}_{(\alpha\beta)}D_{p(\beta)}\mu^i \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, t). \tag{52}$$

*Im $R_r$ ist dann der durch die Vektoren ${}_{(\alpha)}\mu^i$ $(\alpha = 1, \ldots, t;\ i = 1, \ldots, r)$ ein eindeutig parallelverschobener Vektorraum $V^{(s)}$ aufgespannt, dessen Dimension mit dem Rang $s$ der Matrix $\|{}_{(\alpha)}\mu^i\|$ $(\alpha = 1, \ldots, t; i = 1, \ldots, r)$ übereinstimmt.* Es tut dabei nichts zur Sache, wenn die $t$ Vektoren, die in (52) für $i = 1, \ldots, r$ auftreten, nicht unabhängig sind. Sind ${}_{(1)}\mu^i, \ldots, {}_{(s)}\mu^i$ $(s < t,\ i = 1, \ldots, r)$ die unabhängigen Vektoren aus der Reihe ${}_{(1)}\mu^i, \ldots, {}_{(t)}\mu^i$ $(i = 1, \ldots, r)$, so gilt für sie ja ein zu (52) analoges Gleichungssystem. Dem Vektorraum $V^{(s)}$ entspricht eine weitere Spaltung der Maßform $\sum\limits_{i,k=1}^{r} g_{ik}(x_1, \ldots, x_r)\,dx_i\,dx_k$ usw., solange es noch nicht benützte eindeutig parallelverschobene Vektorräume im $R_n$ gibt.

Auf diese Weise kann man Riemannsche Räume mit eindeutig parallelverschobenen Vektorräumen (insbesondere Vektoren) konstruieren. Ist z. B.

$$g_{11}\,dx_1^2 + 2g_{12}\,dx_1\,dx_2 + g_{22}\,dx_2^2$$

das quadrierte Bogenelement eines Riemannschen $R_2$, so ist

$$g_{11}(x_1, x_2)\,dx_1^2 + 2g_{12}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 + g_{22}(x_1, x_2)\,dx_2^2 + g_{33}(x_3)\,dx_3^2$$

das quadrierte Bogenelement eines Riemannschen $R_3$, in dem ein Vektor $\left(\lambda^1 = \lambda^2 = 0, \lambda^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\right)$ eindeutig parallelverschoben ist.

# VII. Die $l$ dimensionalen Hyperflächen im Riemannschen $R_n$ und die Erweiterung des absoluten Differentialkalküls.

## § 1. Flächen- und Raumtensoren. Das verallgemeinerte Riccidifferential.

Die $F_l$ sei in Parameterdarstellung[1])

$$x_i = x_i(y_1, \ldots, y_l) \tag{1}$$

gegeben. Die $l$ Vektoren

$$_\alpha\eta^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}, \tag{2}$$

die den *Tangentenraum* (genauer *Tangentenvektorraum*) der $F_l$ in einem Punkt $P$ aufspannen, sind linear unabhängig; die Funktionalmatrix

$$\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \right\| \tag{3}$$

ist dann vom Rang $l$. Die Größen (2) sind, wie erwähnt (III, § 4), bezüglich der Transformationen der Koordinaten $x_i$ *(Raumtransformationen)*, also bei festen $y_1, \ldots, y_l$ für jedes $\alpha$ ein kontravarianter Vektor des $R_n$ *(Raumvektor)*, dagegen bezüglich der Transformationen der Parameter $y_\alpha$ *(Flächentransformationen)* bei festen $x_1, \ldots, x_n$ für jedes $i$ ein kovarianter Vektor der $F_l$, diese als Riemannscher $R_l$ aufgefaßt *(Flächenvektor)*. Wir stellen fest:

*Jede geometrische Größe der im $R_n$ eingebetteten $F_l$ muß eine Invariante oder ein Tensor sein, und zwar sowohl bezüglich der Raumtransformationen als auch bezüglich der Flächentransformationen.*

Mit

$$^{\beta_1 \cdots \beta_\sigma}_{\alpha_1 \cdots \alpha_\varrho} T^{j_1 \cdots j_s}_{i_1 \cdots i_r} \tag{4}$$

bezeichnen wir einen *Tensor* eines Punktes $P$ der $F_l$, der bezüglich der $\left\{\begin{matrix}\text{Raumtransformationen}\\ \text{Flächentransformationen}\end{matrix}\right\}$ in den $\left\{\begin{matrix} i_1, \ldots, i_r \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho \end{matrix}\right\}$ kovariant und in den $\left\{\begin{matrix} j_1, \ldots, j_s \\ \beta_1, \ldots, \beta_\sigma \end{matrix}\right\}$

---

1) Wir unterscheiden im folgenden Indizes, die von 1 bis $n$ laufen, und solche, die von 1 bis $l$ laufen. Um das nicht immer wieder angeben zu müssen, bezeichnen wir in diesem Abschnitt einheitlich die ersteren mit lateinischen, die letzteren mit griechischen Indizes. Vgl. zu dem folgenden auch III, § 4.

kontravariant ist. Dabei ist der Tensor jetzt als das Koeffizientensystem einer invarianten Multilinearform beliebiger Raum- und Flächenvektoren definiert. Z. B. ist

$$(5)\qquad {}^{\beta}_{\alpha}T_{ij}$$

ein solcher Tensor, wenn bei simultanen Raum- und Flächentransformationen

$$(6)\qquad {}^{\beta}_{\alpha}\overline{T}_{ij}\,{}^{\alpha}\overline{\mu}\,{}_{\beta}\overline{\lambda}\,\overline{\varrho}^{i}\,\overline{\sigma}^{j} = {}^{\beta}_{\alpha}T_{ij}\,{}^{\alpha}\mu\,{}_{\beta}\lambda\,\varrho^{i}\,\sigma^{j}$$

für *beliebige* Vektoren ${}^{\alpha}\mu$, ${}_{\beta}\lambda$ der $F_l$, $\varrho^i$, $\sigma^j$ des $R_n$. Transformiert man nur die Raumkoordinaten, so ist ${}^{\alpha}\overline{\mu} = {}^{\alpha}\mu$, ${}_{\beta}\overline{\lambda} = {}_{\beta}\lambda$ und

$$(7)\qquad {}^{\alpha}\mu\,{}_{\beta}\lambda\left({}^{\beta}_{\alpha}\overline{T}_{ij}\,\overline{\varrho}^{i}\,\overline{\sigma}^{j} - {}^{\beta}_{\alpha}T_{ij}\,\varrho^{i}\,\sigma^{j}\right) = 0,$$

woraus wegen der Willkür der Vektoren ${}^{\alpha}\mu$ und ${}_{\beta}\lambda$

$$(8)\qquad {}^{\beta}_{\alpha}\overline{T}_{ij}\,\overline{\varrho}^{i}\,\overline{\sigma}^{j} = {}^{\beta}_{\alpha}T_{ij}\,\varrho^{i}\,\sigma^{j}$$

folgt. Die ${}^{\beta}_{\alpha}T_{ij}$ sind also für jedes Paar $\alpha, \beta$ ein zweifach kovarianter Tensor des $R_n$ *(Raumtensor)* und ähnlich für jedes Paar $i, j$ ein gemischter Tensor zweiter Stufe der $F_l$ *(Flächentensor)*.

Ist $g_{ik}$ der Maßtensor des $R_n$ und ${}_{\alpha\beta}\gamma$ der Maßtensor der $F_l$, so gilt

$$(9)\qquad {}_{\alpha\beta}\gamma = g_{ik}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}.$$

Es sei nun $\lambda^i$ ein dem Tangentenraum der $F_l$ in einem Punkt $P$ angehörender Raumvektor. Dann ist also

$$(10)\qquad \lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,{}^{\alpha}\lambda;$$

die Größen ${}^{\alpha}\lambda$ sind dabei Invarianten gegenüber Raumtransformationen, aber ein kontravarianter Vektor gegenüber Parametertransformationen, d. h. es gilt, wenn $\overline{y}_\alpha = \overline{y}_\alpha(y_1, \ldots, y_l)$ eine solche Parametertransformation ist,

$$(11)\qquad {}^{\alpha}\overline{\lambda} = \frac{\partial \overline{y}_\alpha}{\partial y_\beta}\,{}^{\beta}\lambda,$$

wenn

$$(12)\qquad \lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial \overline{y}_\alpha}\,{}^{\alpha}\overline{\lambda}$$

die zu (10) analoge Darstellung des Raumvektors $\lambda^i$ ist.

Ist

$$(13)\qquad \underset{(t)}{\lambda^i}$$

ein normiertes Raum-$n$-Bein ($n$-Bein von Raumvektoren), das in allen Punkten einer gewissen Umgebung der $F_l$ definiert sei, so gilt

$$(14)\qquad \underset{(s)}{\lambda^i}\,\underset{(t)}{\lambda_i} = \delta_{st}, \quad \underset{(s)}{\lambda_i}\,\underset{(s)}{\lambda^k} = \delta^k_i.$$

Ferner sei

(15) $$ {}^{\alpha}\underset{(\tau)}{\omega} $$

ein in allen Punkten der $F_l$ definiertes normiertes Flächen-$l$-Bein ($l$-Bein von Flächenvektoren), so daß

(16) $$ {}^{\alpha}\underset{(\sigma)}{\omega}\,{}_{\alpha}\underset{(\tau)}{\omega} = \delta_{\sigma\tau}, \quad {}_{\alpha}\underset{(\sigma)}{\omega}\,{}^{\beta}\underset{(\sigma)}{\omega} = \delta_{\alpha}^{\beta} $$

ist. (Statt $\delta_{\alpha}^{\beta}$ sollte besser ${}^{\beta}_{\alpha}\delta$ geschrieben werden.)

*Jeder Tensor* (4) *besitzt dann eine eindeutige Darstellung durch die Beine* (13) *und* (15). Zunächst gilt nämlich bei festen $\alpha_1, \dots, \alpha_\varrho$, $\beta_1, \dots, \beta_\sigma$

(17) $$ {}^{\beta_1\dots\beta_\sigma}_{\alpha_1\dots\alpha_\varrho}T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r} = {}^{\beta_1\dots\beta_\sigma}_{\alpha_1\dots\alpha_\varrho}\underset{(p_1\dots p_r,\, q_1\dots q_s)}{T}\;\underset{(p_1)}{\lambda_{i_1}}\dots\underset{(p_r)}{\lambda_{i_r}}\,\underset{(q_1)}{\lambda^{j_1}}\dots\underset{(q_s)}{\lambda^{j_s}}, $$

wo jetzt

(18) $$ {}^{\beta_1\dots\beta_\sigma}_{\alpha_1\dots\alpha_\varrho}\underset{(p_1\dots p_r,\, q_1\dots q_s)}{T} = {}^{\beta_1\dots\beta_\sigma}_{\alpha_1\dots\alpha_\varrho}T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_r}\;\underset{(p_1)}{\lambda^{i_1}}\dots\underset{(p_r)}{\lambda^{i_r}}\,\underset{(q_1)}{\lambda_{j_1}}\dots\underset{(q_s)}{\lambda_{j_s}} $$

ein Flächentensor, also durch das $l$-Bein (15) darstellbar ist:

(19) $$ {}^{\beta_1\dots\beta_\sigma}_{\alpha_1\dots\alpha_\varrho}\underset{(p_1\dots p_r,\, q_1\dots q_s)}{T} = \overset{(\delta_1\dots\delta_\varrho,\ \varepsilon_1\dots\varepsilon_\sigma)}{\underset{(p_1\dots p_r,\, q_1\dots q_s)}{T}}\;{}_{\alpha_1}\underset{(\delta_1)}{\omega}\dots{}_{\alpha_\varrho}\underset{(\delta_\varrho)}{\omega}\,{}^{\beta_1}\underset{(\varepsilon_1)}{\omega}\dots{}^{\beta_\sigma}\underset{(\varepsilon_\sigma)}{\omega}. $$

Setzen wir (19) in (17) ein, so erhalten wir die gesuchte Darstellung.

Wir definieren nun eine *Differentialoperation* $D$, die jedem, längs eines Kurvenstückes der $F_l$ definierten, stetig differenzierbaren Tensor einen Tensor gleicher Art zuordnet. Diese Operation möge folgenden Gesetzen genügen:

I. $$ D\varphi = d\varphi, $$

wenn $\varphi$ ein Skalar ist;

II. $$ D\lambda^i = d\lambda^i + \left\{ {p\,q \atop i} \right\}_g \lambda^p\, dx_q, $$

wo $\left\{ {p\,q \atop i} \right\}_g$ die Christoffelklammern für den Maßtensor $g_{ik}$ des $R_n$ sind;

III. $$ D^{\alpha}\lambda = d^{\alpha}\lambda + \left\{ {\omega\,\tau \atop \alpha} \right\}_\gamma {}^{\omega}\lambda\, dy_\tau, $$

wo $\left\{ {\omega\,\tau \atop \alpha} \right\}_\gamma$ die Christoffelklammern für den Maßtensor ${}_{\alpha\beta}\gamma$ der $F_l$ sind;

IV. $$ D(U+V) = DU + DV, $$

wenn $U$ und $V$ gleichartige Tensoren sind;

V. $$ D(U\cdot V) = U\cdot DV + V\cdot DU, $$

wenn $U$ und $V$ beliebige Tensoren sind.

Daraus folgt, daß für reine Raumtensoren die Operation $D$ mit dem absoluten Differential des $R_n$, für reine Flächentensoren mit dem absoluten Differential der $F_l$ übereinstimmt. Insbesondere gilt

$$D\lambda_i = d\lambda_i - \begin{Bmatrix} i\,q \\ p \end{Bmatrix}_g \lambda_p\, dx_q \tag{20}$$

und

$$D_\alpha \lambda = d_\alpha \lambda - \begin{Bmatrix} \alpha\,\tau \\ \omega \end{Bmatrix}_\gamma {}_\omega\lambda\, dy_\tau. \tag{21}$$

Aus der Darstellung des allgemeinen Tensors (4) mittels der Beine (13) und (15) folgt wegen I. bis V. und (20), (21)

$$\left\{\begin{aligned} D^{\beta_1\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} &= d^{\beta_1\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r} \\ &+ {}^{\beta_1\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}T^{p j_2\ldots j_s}_{i_1 i_2\ldots i_r}\begin{Bmatrix} p\,q \\ j_1 \end{Bmatrix}_g dx_q + {}^{\beta_1\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1 p j_3\ldots j_s}_{i_1 i_2 i_3\ldots i_r}\begin{Bmatrix} p\,q \\ j_2 \end{Bmatrix}_g dx_q + \cdots \\ &- {}^{\beta_1\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1 j_2\ldots j_s}_{p i_2\ldots i_r}\begin{Bmatrix} i_1\,q \\ p \end{Bmatrix}_g dx_q - {}^{\beta_1\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1 j_2 j_3\ldots j_s}_{i_1 p i_3\ldots i_r}\begin{Bmatrix} i_2\,q \\ p \end{Bmatrix}_g dx_q - \cdots \\ &+ {}^{\omega\beta_2\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\begin{Bmatrix} \omega\,\tau \\ \beta_1 \end{Bmatrix}_\gamma dy_\tau + {}^{\beta_1\omega\beta_3\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\begin{Bmatrix} \omega\,\tau \\ \beta_2 \end{Bmatrix}_\gamma dy_\tau + \cdots \\ &- {}^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_\sigma}_{\omega\alpha_2\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\begin{Bmatrix} \alpha_1\,\tau \\ \omega \end{Bmatrix}_\gamma dy_\tau - {}^{\beta_1\beta_2\beta_3\ldots\beta_\sigma}_{\alpha_1\omega\alpha_3\ldots\alpha_\varrho}T^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_r}\begin{Bmatrix} \alpha_2\,\tau \\ \omega \end{Bmatrix}_\gamma dy_\tau - \cdots \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Die Operation $D$, das verallgemeinerte Riccidifferential, ordnet ihrer Konstruktion nach jedem Tensor einen gleichartigen zu; daß die Gesetze I. bis V. gelten, zeigt man durch Verwendung derselben Schlußweisen, die uns in II, § 2 zum entsprechenden Resultat für reine Raumtensoren führten.

Für den Tensor (2) gilt insbesondere

$$D_\alpha\eta^i = d_\alpha\eta^i + \begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix}_g {}_\alpha\eta^p dx_q - \begin{Bmatrix} \alpha\,\tau \\ \omega \end{Bmatrix}_\gamma {}_\omega\eta^i dy_\tau \tag{23}$$

oder wegen $dx_q = {}_\tau\eta^q dy_\tau$

$$D_\alpha\eta^i = \left(\frac{\partial_\alpha\eta^i}{\partial y_\tau} + \begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix}_g {}_\alpha\eta^p\,{}_\tau\eta^q - \begin{Bmatrix} \alpha\,\tau \\ \omega \end{Bmatrix}_\gamma {}_\omega\eta^i\right) dy_\tau. \tag{24}$$

Da der Flächenvektor $dy_\tau$ ohne Einschränkung in der $F_l$ gewählt werden kann, muß

$$\frac{D\alpha\eta^i}{Dy_\tau} = {}_{\alpha\tau}\eta^i = \frac{\partial\alpha\eta^i}{\partial y_\tau} + \begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix}_g {}_\alpha\eta^p\,{}_\tau\eta^q - \begin{Bmatrix} \alpha\,\tau \\ \omega \end{Bmatrix}_\gamma {}_\omega\eta^i \tag{25}$$

ein zweifach kovarianter Flächen- und einfach kontravarianter Raumtensor ${}_{\alpha\tau}\eta^i$ sein. Setzen wir in (25) den Ausdruck (2) für ${}_\alpha\eta^i$ ein, so erhalten wir

$$\frac{D_\alpha\eta^i}{Dy_\tau} = {}_{\alpha\tau}\eta^i = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\alpha \partial y_\tau} + \begin{Bmatrix} p\,q \\ i \end{Bmatrix}_g \frac{\partial x_p}{\partial y_\alpha}\,\frac{\partial x_q}{\partial y_\tau} - \begin{Bmatrix} \alpha\,\tau \\ \omega \end{Bmatrix}_\gamma \frac{\partial x_i}{\partial y_\omega}, \tag{26}$$

woraus noch

$${}_{\alpha\omega}\eta^i = {}_{\omega\alpha}\eta^i \tag{27}$$

folgt.

Für die Maßtensoren $g_{ik}$ des $R_n$ und ${}_{\alpha\beta}\gamma$ der $F_l$ gilt

$$Dg_{ik} = Dg^{ik} = D_{\alpha\beta}\gamma = D^{\alpha\beta}\gamma = 0. \tag{28}$$

Wir geben nun noch eine geometrische Deutung des Tensors ${}_{\alpha\omega}\eta^i$ (25). Aus (9) folgt durch Differentiation $\frac{D}{D y_\tau}$

(29) $$g_{ik}\frac{D_\alpha\eta^i}{D y_\tau}\,{}_\beta\eta^k + g_{ik}\,{}_\alpha\eta^i\,\frac{D_\beta\eta^k}{D y_\tau} = 0 .$$

Der Tensor

(30) $${}_{\tau\alpha\beta}T = g_{ik}\,{}_{\alpha\tau}\eta^i\,{}_\beta\eta^k$$

ist in den zwei ersten Indizes symmetrisch, in den zwei letzten (und somit auch im ersten und dritten) nach (29) alternierend. Ein solcher Tensor muß aber wegen

(31) $${}_{\alpha\tau\beta}T = -\,{}_{\tau\beta\alpha}T = {}_{\beta\alpha\tau}T = -\,{}_{\alpha\tau\beta}T$$

verschwinden. Somit ist

(32) $$g_{ik}\,{}_{\alpha\tau}\eta^i\,{}_\beta\eta^k = 0 .$$

Da die ${}_\beta\eta^k = \frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}$ den Tangentenvektorraum der $F_l$ aufspannen, sind die ${}_{\alpha\tau}\eta^i$ *Normalenvektoren* (in bezug auf Raumtransformationen) der $F_l$.

## § 2. Geodätische $F_l$ und Ebenen $E_l$.

Es sei

(1) $$y_\alpha = y_\alpha(s)$$

eine auf die Bogenlänge $s$ bezogene Kurve $C$ der $F_l$. Aus

(2) $$\frac{d x_i}{d s} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,\frac{d y_\alpha}{d s}$$

folgt durch Differentiation $\frac{D}{D s}$

(3) $$\frac{D^2 x_i}{D s^2} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,\frac{D^2 y_\alpha}{D s^2} + {}_{\alpha\beta}\eta^i\,\frac{d y_\alpha}{d s}\,\frac{d y_\beta}{d s}$$

oder, wenn wir mit $\underset{p}{\xi^i}$ das begleitende $n$-Bein und mit $\frac{1}{\varrho_r}$ die Krümmungen von $C$ im $R_n$, dagegen mit $\underset{\lambda}{{}^\alpha\eta}$ das begleitende $l$-Bein und mit $\frac{1}{\sigma_\lambda}$ die Krümmungen von $C$ in der $F_l$ bezeichnen,

(4) $$\frac{1}{\varrho_1}\,\underset{2}{\xi^i} = \frac{1}{\sigma_1}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,\underset{2}{{}^\alpha\eta} + {}_{\alpha\beta}\eta^i\,\underset{1}{{}^\alpha\eta}\,\underset{1}{{}^\beta\eta} .$$

Eine $F_l$ nannten wir *geodätisch in einem Punkte* $P$ (der natürlich ein Punkt der $F_l$ sein muß), wenn alle Flächengeodätischen, die durch $P$ gehen, in $P$ die erste Raumkrümmung Null haben, d. h. wenn aus $\frac{1}{\sigma_1} = 0$ in $P$ auch $\frac{1}{\varrho_1} = 0$ folgt. In $P$ ist dann ${}_{\alpha\beta}\eta^i\,\frac{d y_\alpha}{d s}\,\frac{d y_\beta}{d s} = 0$ für alle Richtungen $\frac{d y_\alpha}{d s}$, also ist in $P$

notwendigerweise ${}_{\alpha\beta}\eta^i = 0$. Ist in $P$ umgekehrt ${}_{\alpha\beta}\eta^i = 0$, so verschwindet in $P$ mit $\frac{1}{\sigma_1}$ auch $\frac{1}{\varrho_1}$. *Also ist notwendig und hinreichend, damit eine $F_l$ in $P$ geodätisch ist, daß in $P$*

$$(5) \qquad {}_{\alpha\beta}\eta^i = 0$$

*gilt.* Ist eine $F_l$ in allen ihren Punkten geodätisch, oder, was dasselbe besagt, sind alle Flächengeodätischen auch Raumgeodätische, so ist sie eine *Ebene* $E_l$; notwendig und hinreichend dafür ist, daß (5) identisch in den $y_\alpha$ gilt.

Im allgemeinen wird eine Flächengeodätische $\left(\frac{1}{\sigma_1} = 0\right)$ keine Raumgeodätische sein. Aus (4) folgt, daß *eine Flächengeodätische als eine Kurve der $F_l$ charakterisiert ist, deren erste Raumnormale eine Normale der $F_l$ ist.* Es ist das eine einfache Verallgemeinerung der elementaren Definition der Geodätischen einer Fläche $F_2$ im euklidischen $R_3$ (Bd. 1, VI, § 2).

Aus (4) folgt, wenn wir den Index $i$ herunterziehen,

$$(6) \qquad \frac{1}{\varrho_1}\underset{2}{\xi_i} = \frac{1}{\sigma_1} g_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial y_\alpha}\,{}^{\alpha}\underset{2}{\eta} + {}_{\alpha\beta}\eta_i\,{}^{\alpha}\underset{1}{\eta}\,{}^{\beta}\underset{1}{\eta}$$

und daraus durch Überschiebung mit (4) wegen (1, 32)

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}\,{}^{\alpha}\underset{2}{\eta}\,{}^{\beta}\underset{2}{\eta} + {}_{\alpha\beta}\eta^i\,{}_{\gamma\delta}\eta_i\,{}^{\alpha}\underset{1}{\eta}\,{}^{\beta}\underset{1}{\eta}\,{}^{\gamma}\underset{1}{\eta}\,{}^{\delta}\underset{1}{\eta}.$$

Da $g_{ik}\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta} = {}_{\alpha\beta}\gamma$ der Maßtensor der $F_l$ und die erste Normale ${}^{\alpha}\underset{2}{\eta}$ von $C$ ein Einheitsvektor ist, wird aus (7)

$$(8) \qquad \frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + g_{ik}\,{}_{\alpha\beta}\eta^i\,{}_{\gamma\delta}\eta^k\,{}^{\alpha}\underset{1}{\eta}\,{}^{\beta}\underset{1}{\eta}\,{}^{\gamma}\underset{1}{\eta}\,{}^{\delta}\underset{1}{\eta}.$$

Die Differenz $\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}$ ist somit nie negativ, d. h. es ist stets[1])

$$(9) \qquad \left|\frac{1}{\varrho_1}\right| \geqq \left|\frac{1}{\sigma_1}\right|.$$

Ferner folgt aus (8), daß $\frac{1}{\varrho_1^2} - \frac{1}{\sigma_1^2}$ für alle Kurven der $F_l$, die durch einen Punkt $P$ gehen und in $P$ dieselbe Richtung haben, *konstant* ist. Insbesondere erreicht $\frac{1}{\varrho_1}$ seinen kleinsten Wert, wenn $\frac{1}{\sigma_1} = 0$ ist, d. h.:

*Unter allen Kurven der $F_l$, die in einem gegebenen Punkt gleiche Richtung haben, hat die Geodätische die kleinste Raumkrümmung.*

Eine weitere bemerkenswerte Folgerung aus (4) besteht in folgendem. Bildet man für $l$ Geodätische der $F_l$, die alle durch einen Punkt $P$ hin-

1) Für die *Asymptotenlinien* einer $F_2$ im euklidischen $R_3$ verschwindet ${}_{\alpha\beta}\eta^i\,dy_\alpha\,dy_\beta$, so daß für sie $\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\sigma_1^2}$ gilt. Damit ist eine *metrische Charakterisierung* der Asymptotenlinien gewonnen.

durchgehen und in $P$ aufeinander senkrecht stehen, in $P$ die Summe $\sum \frac{1}{\varrho_1} \underset{2}{\xi^i}$, so erhält man

$$\sum \frac{1}{\varrho_1} \underset{2}{\xi^i} = {}_{\alpha\beta}\eta^i \sum \underset{1}{{}^\alpha\eta} \underset{1}{{}^\beta\eta} = {}_{\alpha\beta}\eta^{i\,\alpha\beta}\gamma, \tag{10}$$

da die $\underset{1}{{}^\alpha\eta}$ ein normiertes $l$-Bein der $F_l$ bilden, so daß $\sum \underset{1}{{}^\alpha\eta} \underset{1}{{}^\beta\eta} = {}^{\alpha\beta}\gamma$ ist. *Die Summe* (10) *ist also von der besonderen Wahl der Richtungen der $l$ Geodätischen unabhängig.*

Wir betrachten nun insbesondere eine Ebene $E_l$. Für sie ist ${}_{\alpha\beta}\eta^i = 0$ und somit $\frac{1}{\varrho_1^2} = \frac{1}{\sigma_1^2}$ für jede Kurve der $E_l$. Bei geeigneter Wahl des Vorzeichens können wir

$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{\sigma_1} \tag{11}$$

setzen. Aus (4) folgt dann, daß

$$\underset{2}{\xi^i} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \underset{2}{{}^\alpha\eta} \tag{12}$$

für jede Kurve der $E_l$ gilt. Daraus folgt durch Differentiation $\frac{D}{Ds}$ wegen (5)

$$-\frac{1}{\varrho_1} \underset{1}{\xi^i} + \frac{1}{\varrho_2} \underset{3}{\xi^i} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \left( -\frac{1}{\sigma_1} \underset{1}{{}^\alpha\eta} + \frac{1}{\sigma_2} \underset{3}{{}^\alpha\eta} \right) \tag{13}$$

oder wegen (11) und (2)

$$\frac{1}{\varrho_2} \underset{3}{\xi^i} = \frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \underset{3}{{}^\alpha\eta}. \tag{14}$$

Daraus schließt man wie oben, daß auch $\frac{1}{\varrho_2^2} = \frac{1}{\sigma_2^2}$ sein muß, oder, bei geeigneter Entscheidung über das Vorzeichen, $\frac{1}{\varrho_2} = \frac{1}{\sigma_2}$ und somit

$$\underset{3}{\xi^i} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \underset{3}{{}^\alpha\eta} \tag{15}$$

usw. Allgemein gilt

$$\underset{\beta}{\xi^i} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \underset{\beta}{{}^\alpha\eta}, \quad \frac{1}{\varrho_\beta} = \frac{1}{\sigma_\beta}. \tag{16}$$

*Eine Kurve einer $E_l$ des $R_n$ ist also, als Raumkurve des $R_n$ angesehen, höchstens $l-1$ fach gekrümmt, d. h. es ist stets $\frac{1}{\varrho_l} = 0$.*

Es sei jetzt

$$\lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} {}^\alpha\lambda \tag{17}$$

ein längs der Kurve $C$ definierter Vektor der $F_l$. Durch Differentiation $D$ folgt daraus

$$D\lambda^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} D^\alpha\lambda + {}_{\alpha\beta}\eta^i\, {}^\alpha\lambda\, d y_\beta. \tag{18}$$

Ist ${}^{\alpha}\lambda$ in der $F_l$ parallelverschoben, so ist $D\,{}^{\alpha}\lambda = 0$, und aus (18) folgt

(19) $$D\lambda^i = {}_{\alpha\beta}\eta^i\,{}^{\alpha}\lambda\, d y_\beta,$$

d. h. der infinitesimale Zuwachs $D\lambda^i$ eines in der $F_l$ parallelverschobenen Vektors steht auf der $F_l$ senkrecht. Und umgekehrt gilt: Ist $D\lambda^i$ senkrecht zur $F_l$, so ist $D\,{}^{\alpha}\lambda = 0$. *Ein in der $F_l$ parallelverschobener Vektor ist also dadurch charakterisiert, daß sein infinitesimaler Zuwachs stets senkrecht zur $F_l$ steht.*

Die Parallelverschiebung in einer $F_l$ des $R_n$ hängt demnach bei vorgegebener Kurve nur von der Tangentenvektormannigfaltigkeit der $F_l$ längs dieser Kurve ab. Haben zwei $F_l$ eine Kurve $C$ gemeinsam und längs $C$ dieselben Tangentenvektorräume, so ist jeder in der einen $F_l$ längs $C$ parallelverschobene Vektor auch in der zweiten $F_l$ parallelverschoben, denn der invariante Zuwachs des Vektors steht immer auf beiden $F_l$ zugleich senkrecht. Für die $F_2$ des euklidischen $R_3$ folgt daraus die bekannte, von T. Levi-Civita angegebene Konstruktion eines parallelverschobenen Flächenvektors mittels der der Fläche längs der Verschiebungskurve umschriebenen Torse (Bd. 1, VI, § 1).

Im allgemeinen ist ein längs einer Kurve $C$ der $F_l$ parallelverschobener Vektor ${}^{\alpha}\lambda$ ($D\,{}^{\alpha}\lambda = 0$) im $R_n$ (d. h. als Raumvektor aufgefaßt) *nicht* parallelverschoben; dazu ist notwendig und hinreichend, daß ${}_{\alpha\beta}\eta^i = 0$ ist. Durch diese Eigenschaft sind aber nach (5) die Ebenen charakterisiert. Man kann auch sagen: *Eine Ebene $E_l$ hat die charakteristische Eigenschaft, daß jeder ihr angehörende Vektor bei räumlicher Parallelverschiebung längs einer beliebigen Kurve der $E_l$ stets in ihr verbleibt.* Denn wegen (18) folgt für einen solchen Vektor aus $D\lambda^i = 0$

(20) $$\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} D\,{}^{\alpha}\lambda = 0,$$

also $D\,{}^{\alpha}\lambda = 0$ und

(21) $${}_{\alpha\beta}\eta^i\,{}^{\alpha}\lambda\, d y_\beta = 0$$

und somit wegen der Willkür der Anfangslage (${}^{\alpha}\lambda$ beliebig) und der Kurve $C$ ($d y_\beta$ beliebig)

(22) $${}_{\alpha\beta}\eta^i = 0.$$

Aus (22) und $D\,{}^{\alpha}\lambda = 0$ folgt dann auch umgekehrt $D\lambda^i = 0$. Damit haben wir den in VI, § 4 angekündigten allgemeinen Nachweis für die Äquivalenz der beiden Ebenendefinitionen.

Zwischen den Tangenten einer Kurve $C$ in der $F_l$ und im $R_n$ besteht die Beziehung (2) oder

(23) $$\underset{1}{\xi^i} = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,\underset{1}{{}^{\alpha}\eta}.$$

Es wird also durch $\underset{1}{{}^{\alpha}\eta}$ der Vektor $\underset{1}{\xi^i}$ „dargestellt“, d. h. die $\underset{1}{{}^{\alpha}\eta}$ sind die kontravarianten Komponenten des Tangentenvektors in der $F_l$, die $\underset{1}{\xi^i}$ die kontravarianten Komponenten desselben Vektors im $R_n$. (Die Tangente von $C$ in der $F_l$ ist mit der Tangente von $C$ im $R_n$ identisch.) Zwischen den verschiedenen Normalen besteht aber, wie (4) zeigt, keine so einfache Relation. Sei $\underset{\omega}{\eta}^i$ der Raumvektor, der im $R_n$ der $(\omega - 1)$ten Normalen von $C$ bezüglich der $F_l$ entspricht, so daß

$$(24) \qquad \underset{\omega}{\eta}^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\, {}^\alpha\underset{\omega}{\eta}$$

gilt. Durch Differentiation $\frac{D}{Ds}$ folgt daraus

$$(25) \qquad \frac{D}{Ds}\underset{\omega}{\eta}^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\left(-\frac{1}{\sigma_{\omega-1}}\,{}^\alpha\underset{\omega-1}{\eta} + \frac{1}{\sigma_\omega}\,{}^\alpha\underset{\omega+1}{\eta}\right) + {}_{\alpha\beta}\eta^i\,{}^\alpha\underset{\omega}{\eta}\frac{dy_\beta}{ds}$$

also

$$(26) \qquad \frac{D}{Ds}\underset{\omega}{\eta}^i = -\frac{1}{\sigma_{\omega-1}}\underset{\omega-1}{\eta}^i + \frac{1}{\sigma_\omega}\underset{\omega+1}{\eta}^i + {}_{\alpha\beta}\eta^i\,{}^\alpha\underset{\omega}{\eta}\frac{dy_\beta}{ds}.$$

Haben wir also das normierte $r$-Bein

$$(27) \qquad \underset{1}{\eta}^i, \underset{2}{\eta}^i, \ldots, \underset{r}{\eta}^i$$

gebildet, so erhalten wir $\frac{1}{\sigma_r}\underset{r+1}{\eta}^i$ nach (26) als Projektion (III, § 2) des Vektors $\frac{D}{Ds}\underset{r}{\eta}^i$ in den Vektorraum, der im Tangentenvektorraum der $F_l$ auf den Vektoren (27) senkrecht steht. Da $\underset{1}{\eta}^i = \frac{dx_i}{ds}$ der uns bekannte Tangentenvektor der Kurve ist, können wir auf diese Art *vom $R_n$ aus* das begleitende $l$-Bein einer Kurve der $F_l$ (bezüglich der $F_l$ genommen) bilden. Für eine Ebene $E_l$ ist das begleitende $l$-Bein und die Krümmungen in der $E_l$ und im $R_n$ identisch.[1]) Zu bemerken ist noch, daß die Konstruktion des begleitenden Beins (in der $F_l$) einer Kurve $C$ der $F_l$ nur von $C$ und von den Tangentenvektorräumen der $F_l$ in den Punkten von $C$ abhängt.

## § 3. Die Relativkrümmungen einer $F_l$ im $R_n$.

Aus der Formel (1, 32), d. h.

$$(1) \qquad g_{ik}\frac{D_\alpha \eta^i}{Dy_\varepsilon}\,{}_\gamma\eta^k = 0$$

gewinnen wir durch Differentiation $\frac{D}{Dy_\beta}$

$$(2) \qquad g_{ik}\frac{D}{Dy_\beta}\left(\frac{D_\alpha\eta^i}{Dy_\varepsilon}\right){}_\gamma\eta^k + g_{ik}\frac{D_\alpha\eta^i}{Dy_\varepsilon}\,\frac{D_\gamma\eta^k}{Dy_\beta} = 0$$

1) Aus obiger Überlegung folgt, daß eine in $P$ geodätische $F_l$ die charakteristische Eigenschaft hat, daß das begleitende Bein und die Krümmungen jeder durch $P$ gehenden Kurve in $P$ identisch sind, ob man sie nun in der $F_l$ oder im $R_n$ berechnet.

oder

$$\frac{D}{D y_\beta}\left(\frac{D\,{}_\alpha\eta^i}{D y_\varepsilon}\right){}_\gamma\eta_i = {}_\gamma\eta_i\,\frac{D^2}{D y_\beta D y_\varepsilon}\,{}_\alpha\eta^i = -\,{}_{\alpha\varepsilon}\eta_i\,{}_{\gamma\beta}\eta^i \tag{3}$$

und weiter

$$_\gamma\eta_i\left[\frac{D^2}{D y_\varepsilon D y_\beta}\,{}_\alpha\eta^i - \frac{D^2}{D y_\beta D y_\varepsilon}\,{}_\alpha\eta^i\right] = {}_{\alpha\varepsilon}\eta_i\,{}_{\gamma\beta}\eta^i - {}_{\alpha\beta}\eta_i\,{}_{\gamma\varepsilon}\eta^i. \tag{4}$$

Bevor wir an die Diskussion dieser Relation gehen, führen wir den neuen Operator

$$\Delta_{\varepsilon\beta} = \frac{D^2}{D y_\varepsilon D y_\beta} - \frac{D^2}{D y_\beta D y_\varepsilon} \tag{5}$$

ein, für den die folgenden Gesetze gelten: Es ist

$$\Delta_{\varepsilon\beta}\,\varphi = 0 \tag{6}$$

für einen Skalar $\varphi = \varphi(y_1, \ldots, y_l)$,

$$\Delta_{\varepsilon\beta}(U + V) = \Delta_{\varepsilon\beta} U + \Delta_{\varepsilon\beta} V \tag{7}$$

für gleichartige Tensoren $U$ und $V$,

$$\Delta_{\varepsilon\beta}(U\,V) = U \Delta_{\varepsilon\beta} V + V \Delta_{\varepsilon\beta} U \tag{8}$$

für beliebige Tensoren $U$ und $V$. Den einfachen Nachweis überlassen wir dem Leser. Für (kontravariante) Raumvektoren haben wir in VI, § 2 bereits festgestellt, daß

$$\frac{D^2\varphi^i}{D x_l D x_k} - \frac{D^2\varphi^i}{D x_k D x_l} = -\,R^i_{.rkl}\,\varphi^r \tag{9}$$

ist. Entsprechend gilt für (kovariante) Flächenvektoren

$$\Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_\alpha\varphi = \frac{D^2\,{}_\alpha\varphi}{D y_\varepsilon D y_\beta} - \frac{D^2\,{}_\alpha\varphi}{D y_\beta D y_\varepsilon} = {}^{\sigma}_{.\alpha\beta\varepsilon}R\,{}_\sigma\varphi \tag{10}$$

wo ${}^{\sigma}_{.\alpha\beta\varepsilon}R$ der Krümmungstensor der $F_l$ ist.

An Stelle von (4) können wir wegen (5)

$$_\gamma\eta_i\,\Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_\alpha\eta^i = {}_{\alpha\varepsilon}\eta_i\,{}_{\gamma\beta}\eta^i - {}_{\alpha\beta}\eta_i\,{}_{\gamma\varepsilon}\eta^i \tag{11}$$

schreiben. Wir gehen nun an die Berechnung von $\Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_\alpha\eta^i$ und denken uns zu diesem Zweck den Tensor ${}_\alpha\eta^i$ durch die Beine (1, 13) und (1, 15) dargestellt:

$$_\alpha\eta^i = \overset{\sigma}{\underset{p}{\eta}}\,{}_\alpha\underset{\sigma}{\omega}\,\underset{p}{\lambda^i}. \tag{12}$$

Üben wir beiderseits die Operation $\Delta_{\varepsilon\beta}$ aus, so ergibt sich unter Beachtung der Gesetze (6) bis (8)

$$\Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_\alpha\eta^i = \overset{\sigma}{\underset{p}{\eta}}\,\underset{p}{\lambda^i}\,\Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_\alpha\underset{\sigma}{\omega} + \overset{\sigma}{\underset{p}{\eta}}\,{}_\alpha\underset{\sigma}{\omega}\,\Delta_{\varepsilon\beta}\,\underset{p}{\lambda^i}. \tag{13}$$

Nun ist wegen (10)

$$\Delta_{\varepsilon\beta}\, {}_{\alpha}\overset{}{\underset{\sigma}{\omega}} = {}^{\tau}_{\cdot\,\alpha\beta\varepsilon}R\, {}_{\tau}\underset{\sigma}{\omega}. \tag{14}$$

Ferner gilt

$$\frac{D}{Dy_\beta}\,\lambda^i = {}_{\beta}\eta^k\,\frac{D}{Dx_k}\,\lambda^i, \tag{15}$$

da ${}_{\beta}\eta^k = \dfrac{\partial x_k}{\partial y_\beta}$ ist. Also folgt

$$\frac{D^2\lambda^i}{Dy_\varepsilon Dy_\beta} = \frac{D\lambda^i}{Dx_k}\,{}_{\varepsilon\beta}\eta^k + \frac{D^2\lambda^i}{Dx_j\,Dx_k}\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j. \tag{16}$$

Wegen der Symmetrie der ${}_{\varepsilon\beta}\eta^k$ in $\varepsilon$ und $\beta$ ergibt sich daraus

$$\Delta_{\varepsilon\beta}\lambda^i = \left(\frac{D^2\lambda^i}{Dx_j\,Dx_k} - \frac{D^2\lambda^i}{Dx_k\,Dx_j}\right){}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j, \tag{17}$$

also wegen (9)

$$\Delta_{\varepsilon\beta}\lambda^i = -\,R^i_{\cdot\,rkj}\,\lambda^r\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j. \tag{18}$$

Wegen (14) und (18) erhalten wir aus (13)

$$\Delta_{\varepsilon\beta}\,{}_{\alpha}\eta^i = {}^{\tau}_{\cdot\,\alpha\beta\varepsilon}R\,{}_{\tau}\underset{\sigma}{\omega}\,\underset{p}{\overset{\sigma}{\eta}}\,\underset{p}{\lambda^i} - R^i_{\cdot\,rkj}\,\underset{p}{\lambda^r}\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j\,\underset{p}{\overset{\sigma}{\eta}}\,{}_{\alpha}\underset{\sigma}{\omega} = {}^{\tau}_{\cdot\,\alpha\beta\varepsilon}R\,{}_{\tau}\eta^i - R^i_{\cdot\,rkj}\,{}_{\alpha}\eta^r\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j. \tag{19}$$

Nun ist

$$ {}_{\gamma}\eta_i\,{}_{\tau}\eta^i = g_{ik}\,{}_{\tau}\eta^i\,{}_{\gamma}\eta^k = {}_{\tau\gamma}\gamma, \tag{20}$$

also folgt aus (11) und (19)

$$ {}_{\alpha\varepsilon}\eta_i\,{}_{\gamma\beta}\eta^i - {}_{\alpha\beta}\eta_i\,{}_{\gamma\varepsilon}\eta^i = {}_{\gamma\alpha\beta\varepsilon}R - R_{irkj}\,{}_{\gamma}\eta^i\,{}_{\alpha}\eta^r\,{}_{\beta}\eta^k\,{}_{\varepsilon}\eta^j. \tag{21}$$

Den Tensor linker Hand nennen wir mit Ricci den *relativen Krümmungstensor der $F_l$ bezüglich des einbettenden $R_n$*; er ist vom Riemannschen Krümmungstensor ${}_{\gamma\alpha\beta\varepsilon}R$ der $F_l$ wohl zu unterscheiden.

Es sei durch die beiden Vektoren

$$p^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,{}^{\alpha}p, \qquad q^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,{}^{\alpha}q \tag{22}$$

in einem Punkt $P$ der $F_l$ eine $F_2$-Richtung der $F_l$ (d. i. ein zweidimensionaler Vektorraum, der dem Tangentenraum der $F_l$ im Punkt $P$ angehört) gegeben. Aus

$$g_{ik}\,p^i\,q^k = {}_{\alpha\beta}\gamma\,{}^{\alpha}p\,{}^{\beta}q \tag{23}$$

folgt dann

$$\begin{aligned}(g_{ik}g_{jh} - g_{ih}g_{jk})\,(p^i q^j - q^i p^j)\,(p^k q^h - q^k p^h)& \\ = ({}_{\alpha\beta}\gamma\,{}_{\varepsilon\delta}\gamma - {}_{\alpha\delta}\gamma\,{}_{\beta\varepsilon}\gamma)\,({}^{\alpha}p\,{}^{\varepsilon}q - {}^{\alpha}q\,{}^{\varepsilon}p)\,({}^{\beta}p\,{}^{\delta}q - {}^{\beta}q\,{}^{\delta}p)&.\end{aligned} \tag{24}$$

Bezeichnen wir die Riemannsche Krümmung des $R_n$ für diese $F_2$-Richtung mit $K(n)$, die der $F_l$ mit $K(l)$ und mit

$$k = \frac{({}_{\alpha\varepsilon}\eta_i\,{}_{\gamma\beta}\eta^i - {}_{\alpha\beta}\eta_i\,{}_{\gamma\varepsilon}\eta^i)\,({}^{\alpha}p\,{}^{\gamma}q - {}^{\alpha}q\,{}^{\gamma}p)\,({}^{\varepsilon}p\,{}^{\beta}q - {}^{\varepsilon}q\,{}^{\beta}p)}{({}_{\alpha\varepsilon}\gamma\,{}_{\gamma\beta}\gamma - {}_{\alpha\beta}\gamma\,{}_{\gamma\varepsilon}\gamma)\,({}^{\alpha}p\,{}^{\gamma}q - {}^{\alpha}q\,{}^{\gamma}p)\,({}^{\varepsilon}p\,{}^{\beta}q - {}^{\varepsilon}q\,{}^{\beta}p)} \tag{25}$$

die *Relativkrümmung* der $F_l$ für diese $F_2$-Richtung in $P$, so folgt aus (21) wegen (24) und (25)

(26) $$k = K(l) - K(n).$$

Ist die $F_l$ in $P$ geodätisch, so verschwindet $k$ in $P$ wegen ${}_{\alpha\varepsilon}\eta_i = 0$, also:

*Die Riemannschen Krümmungen des $R_n$ und einer in $P$ geodätischen $F_l$ des $R_n$ stimmen in $P$ für jede $F_2$-Richtung der $F_l$ überein.* Daraus folgt:

*Eine Ebene $E_l$ hat in allen Punkten dieselben Krümmungen wie der einbettende $R_n$.*

Als Beispiel berechnen wir die Relativkrümmung einer $F_{n-1}$ der Schar

(27) $$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \text{konst.},$$

wobei $\varphi$ den Differentialgleichungen

(28) $$\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_i \mathfrak{d}x_k} = a\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + K g_{ik}\varphi$$

genügt. Dabei ist $a = a(x_1, \ldots, x_n)$ ein Skalar und $K$ eine Konstante. Setzen wir

(29) $$g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \alpha,$$

so erhalten wir für die Richtungen $dx_j$ der $F_{n-1}$, für die $\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j = 0$ ist,

(30) $$\begin{aligned} d\alpha = \mathfrak{d}\alpha = 2g^{ik}\frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_i\mathfrak{d}x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}dx_j &= 2g^{ik}g_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}K\varphi dx_j \\ &= 2K\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}dx_j = 0, \end{aligned}$$

d. h. es ist

(31) $$g^{ik}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} = \text{konst.}$$

längs der $F_{n-1}$ (27). Nun sei

(32) $$x_i = x_i(y_1, \ldots, y_{n-1})$$

eine Parameterdarstellung von (27), so daß

(33) $$\varphi\left(x_1(y_1, \ldots, y_{n-1}), \ldots, x_n(y_1, \ldots, y_{n-1})\right) = \text{konst.}$$

identisch in den $y_\alpha$ gilt (griechische Buchstaben laufen jetzt von 1 bis $l = n-1$). Daraus folgt

(34) $$\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} = 0$$

und weiter durch Differentiation $\frac{D}{Dy_\beta}$[1])

---

1) Die Formel (35) zeigt die Äquivalenz der beiden für eine in $P$ geodätische $F_{n-1}$ charakteristischen Relationen

$$_{\alpha\beta}\eta^i = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_i\mathfrak{d}x_k} = a_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_k} + a_k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

(beide für den Punkt $P$).

$$(35)\qquad \frac{\mathfrak{d}^2\varphi}{\mathfrak{d}x_i\,\mathfrak{d}x_k}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,{}_{\alpha\beta}\eta^i=0.$$

Wegen (28) und (34) läßt sich diese Gleichung auch in der Form

$$(36)\qquad K g_{ik}\,\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}\,\frac{\partial x_k}{\partial y_\beta}\,\varphi+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,{}_{\alpha\beta}\eta^i=0$$

oder

$$(37)\qquad K\varphi\,{}_{\alpha\beta}\gamma+\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,{}_{\alpha\beta}\eta^i=0$$

schreiben, wo ${}_{\alpha\beta}\gamma$ der Maßtensor der $F_{n-1}$ ist. Bezeichnen wir die normierte Normale der $F_{n-1}$ mit $\xi_i$, so ist

$$(38)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}=c\,\xi_i,$$

wo $c$ nach (31) längs der $F_{n-1}$ eine von Null verschiedene Konstante ist. Für den früher im allgemeinen Fall (§ 1) eingeführten Normalenvektor ${}_{\alpha\beta}\eta^i$ der $F_{n-1}$ muß eine Darstellung in der Form

$$(39)\qquad {}_{\alpha\beta}\eta^i={}_{\alpha\beta}B\,\xi^i$$

gelten. Da dann

$$(40)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\,{}_{\alpha\beta}\eta^i=c\,{}_{\alpha\beta}B$$

ist, lautet (37)

$$(41)\qquad K\varphi\,{}_{\alpha\beta}\gamma+c\,{}_{\alpha\beta}B=0.$$

Nun ist wegen (39)

$$(42)\qquad {}_{\alpha\beta}\eta^i\,{}_{\delta\varepsilon}\eta_i={}_{\alpha\beta}B\,{}_{\delta\varepsilon}B,$$

also gilt

$$(43)\qquad {}_{\alpha\beta}\eta^i\,{}_{\delta\varepsilon}\eta_i-{}_{\alpha\varepsilon}\eta^i\,{}_{\beta\delta}\eta_i=\frac{K^2\varphi^2}{c^2}\left({}_{\alpha\beta}\gamma\,{}_{\delta\varepsilon}\gamma-{}_{\alpha\varepsilon}\gamma\,{}_{\beta\delta}\gamma\right).$$

Die Relativkrümmung (25)

$$(44)\qquad k=\left(\frac{K\varphi}{c}\right)^2$$

der $F_{n-1}$ ist daher *konstant und positiv*. Ist der einbettende $R_n$ von konstanter RIEMANNscher Krümmung, so folgt aus (26), daß auch die $F_{n-1}$ konstante RIEMANNsche Krümmung hat. Für $\varphi=0$ wird nach (44) auch $k=0$, und in der Tat ist wegen (28) dann die $F_{n-1}$ eine Ebene $E_{n-1}$, womit aber nicht gesagt ist, daß nur Ebenen die Relativkrümmung Null haben.

# VIII. Spezielle Riemannsche Räume, insbesondere die Räume konstanter Krümmung.

## § 1. Der Schursche Raum.

Wir haben gesehen, daß die Räume konstanter Krümmung für $n > 2$ als jene RIEMANNschen Räume charakterisiert sind, in denen es unbeschränkt (d. h. durch jeden Punkt in jeder Orientierung) Ebenen $E_{n-1}$ gibt. Die entsprechenden Überlegungen in Abschnitt VI gaben uns aber noch keine Gewißheit von der Existenz der Räume konstanter Krümmung. Zum Nachweis derselben haben wir den Maßtensor in geeignet gewählten Koordinaten anzugeben, so wie z. B. der euklidische $R_n$ erst durch die Angabe $g_{ik} = \delta_{ik}$ in gewissen Koordinatensystemen (den rechtwinklig kartesischen) in Evidenz gesetzt ist.

Ehe wir diese Aufgabe für die Räume konstanter Krümmung lösen, wollen wir jene von F. SCHUR[1]) behandelten Räume besprechen, die bloß *in einem Punkte* $P_0$ das Verhalten der Räume konstanter Krümmung zeigen, nämlich *unbeschränkt (d. h. in jeder Orientierung) Ebenen durch* $P_0$ *besitzen.* Wir wollen einen solchen $R_n$ einen SCHURschen $R_n$ und $P_0$ sein *Zentrum* nennen.

Wir beziehen den $R_n$ auf RIEMANNsche Normalkoordinaten, deren Zentrum der für den $R_n$ charakteristische Punkt $P_0$ sei. Wir erinnern zunächst an die wichtigsten Eigenschaften der Normalkoordinaten, die wir in Abschnitt V ausführlich behandelt haben. Bestimmen wir für das folgende $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$, so ist

$$g_{ik} x_k = x_i \tag{1}$$

charakteristisch für ein solches Koordinatensystem (V, § 11). Wir betonen, daß die Existenz eines Normalkoordinatensystems, die hier vorausgesetzt wird, nicht jedem RIEMANNschen $R_n$ zukommen muß. Aus (1) folgt, daß *in* $P_0$ $(x_i = 0)$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = 0 \tag{1'}$$

ist. Die Geodätischen durch $P_0$ werden durch die linearen Relationen

$$x_i = \xi^i s \tag{2}$$

dargestellt, wo die $\xi^i$ Konstante mit $\xi^i \xi^i = 1$ und $s$ die von $P_0$ aus gemessene Bogenlänge der Geodätischen (2) bedeuten. Wegen $\frac{dx_i}{ds} = \xi^i$ ist $\xi^i$ die

1) Math. Ann. 27.

Richtung der Geodätischen (2). Aus (1) folgt für diese Richtung $\xi_i = \xi^i$. Wir zeigten, daß die Kurven (2) Geodätische sind, sobald (1) gilt, bringen hier aber einen zweiten Beweis. Aus (1) folgt durch Differentiation nach $x_j$

$$\delta_{ij} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_k + g_{ij}$$

und hieraus $\quad x_j = \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_i x_k + g_{ij} x_i, \quad x_i = \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_j x_k + g_{ij} x_j,$

also ist $\quad \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} x_i x_k = 0, \quad \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_i} x_j x_k = 0.$

Daraus folgt $\begin{bmatrix} ik \\ j \end{bmatrix} x_i x_k = 0$ und weiter $\begin{Bmatrix} ik \\ j \end{Bmatrix} x_i x_k = 0$. Die Kurven (2) genügen also den Gleichungen $\left(d x_i = \xi^i ds,\ d^2 x_i = 0,\ \xi^i = \frac{x_i}{s}\right)$:

$$d^2 x_j + \begin{Bmatrix} ik \\ j \end{Bmatrix} d x_i d x_k = 0 \tag{3}$$

und sind somit Geodätische, w. z. b. w.[1])

Es gilt: *Wird der Schursche $R_n$ mit dem Zentrum $P_0$ auf Riemannsche Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0$ bezogen, so hat der Maßtensor die Form*

$$g_{ik} = \frac{x_i x_k}{s^2} + \gamma(s)\left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{s^2}\right), \tag{4}$$

wobei

$$s^2 = x_i x_i, \quad \gamma(0) = 1, \quad \gamma'(0) = 0, \quad \gamma(s) > 0, \tag{4'}$$

ist. *Hat umgekehrt der Maßtensor eines Riemannschen $R_n$ diese Form, so ist er ein Schurscher $R_n$ mit dem Zentrum $x_i = 0$, bezogen auf Normalkoordinaten.*

Zunächst eine Vorbemerkung! Hat in einem Koordinatensystem $x_i$ der Maßtensor die Gestalt (4) und setzen wir $\xi^i = \frac{x_i}{s}$, so ist wegen $s^2 = x_i x_i$

$$\xi^i \xi^i = 1.$$

Wir konstruieren ein *euklidisch normiertes* $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\xi^i$, für das

$${}_{(\alpha)}\xi^i\, {}_{(\beta)}\xi^i = \delta_{\alpha\beta}, \quad {}_{(\alpha)}\xi^i\, {}_{(\alpha)}\xi^k = \delta_{ik}$$

gilt und wobei $\xi^i = {}_{(1)}\xi^i$ ist. Daraus folgt

$$\delta_{ik} - \xi^i \xi^k = \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\xi^i\, {}_{(\alpha)}\xi^k,$$

1) Der Parameter $s$, auf den die Kurve (2) bezogen ist, ist proportional der Bogenlänge dieser Kurve. Da aber aus (1) $g_{ik}\xi^k = \xi^i$ folgt, so ist $g_{ik}\xi^k \xi^i = \xi^i \xi^i = 1$, d. h. $g_{ik}\dfrac{dx_i}{ds}\dfrac{dx_k}{ds} = 1$ längs der Geodätischen (2). Der Parameter $s$ ist also die Bogenlänge selbst. Aus $g_{ik}\xi^k = \xi^i$ in $P_0$ folgt $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$, aus $\begin{Bmatrix} ik \\ j \end{Bmatrix}\xi^i \xi^k = 0$ in $P_0$ folgt $\begin{Bmatrix} ik \\ j \end{Bmatrix} = 0$ in $P_0$, denn in $P_0$ sind die Vektoren $\xi^i$ willkürlich.

also wegen (4)

$$g_{ik} = \xi^i \xi^k + \gamma \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\xi^i {}_{(\alpha)}\xi^k. \tag{5}$$

Da

$$\begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 & \cdots & {}_{(1)}\xi^n \\ {}_{(2)}\xi^1 & {}_{(2)}\xi^2 & \cdots & {}_{(2)}\xi^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ {}_{(n)}\xi^1 & {}_{(n)}\xi^2 & \cdots & {}_{(n)}\xi^n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} {}_{(1)}\xi^1 & {}_{(1)}\xi^2 & \cdots & {}_{(1)}\xi^n \\ \gamma\,{}_{(2)}\xi^1 & \gamma\,{}_{(2)}\xi^2 & \cdots & \gamma\,{}_{(2)}\xi^n \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \gamma\,{}_{(n)}\xi^1 & \gamma\,{}_{(n)}\xi^2 & \cdots & \gamma\,{}_{(n)}\xi^n \end{vmatrix} = \gamma^{n-1} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} = g$$

ist, folgt weiter

$$\gamma = \sqrt[n-1]{g}\,. \tag{6}$$

Durch Überschiebung von (4) mit $x_k$ ergibt sich

$$x_i = g_{ik} x_k.$$

Die vorliegenden Koordinaten sind also RIEMANNsche Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0(0, \ldots, 0)$ und mit $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$. Daher ist $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}(P_0) = 0$, also in $P_0$ nach (6)

$$\gamma(0) = 1\,, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} = \gamma' \frac{\partial s}{\partial x_j} = 0$$

und somit $\gamma'(0) = 0$ wegen der Willkür[1]) des Vektors $\frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{x_j}{s}$ in $P_0$. $\Big($Geht man längs $x_j = \xi^j s$, $\xi^j$ konstant, gegen $P_0$, so ist $\frac{x_j}{s} = \xi^j\Big)$. *Die Bedingungen* $\gamma(0) = 1$, $\gamma'(0) = 0$ *sind somit aus der Gestalt* (4) *des Maßtensors* $g_{ik}$ *ableitbar*; sind sie nicht erfüllt, so ist *in* $P_0$ $g_{ik}$ und $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j}$ unbestimmt.

Wir gehen nun an den Beweis unseres Satzes und erinnern vor allem an die zweite Definition der Ebenen $E_{n-1}$ (VI, § 4): Der normierte Normalenvektor $p_i$ einer $E_{n-1}$ ist ein längs beliebiger Kurven der $E_{n-1}$ parallelverschobener Vektor. Ist $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ die $E_{n-1}$, so ist also

$$p_i = f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,, \quad f = \frac{1}{\sqrt{g^{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}}} \tag{7}$$

ein längs der Kurven der $E_{n-1}$ parallelverschobener Vektor. Um den Maßtensor $g_{ik}$ der SCHURschen $R_n$ mit dem Zentrum $P_0(0, \ldots, 0)$ in RIEMANNschen Normalkoordinaten zu bestimmen, verwenden wir die kanonische Darstellung

$$g_{ik} = {}_{(\alpha)}\xi_i\, {}_{(\alpha)}\xi_k \tag{8}$$

durch ein normiertes $n$-Bein des $R_n$. Da ein normiertes $n$-Bein bei Parallelverschiebung normiert bleibt, so gilt (8), wenn ${}_{(\alpha)}\xi_i$ ein parallelverschobenes

1) Richtiger: Unbestimmtheit.

$n$-Bein ist, sobald in irgendeiner Ausgangslage, z. B. in $P_0$ (für Kurven durch $P_0$) das $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\xi_i$ normiert ist. Sei also $P$ ein Punkt im Geltungsbereich der Normalkoordinaten und

$$x_i = \xi^i s \tag{9}$$

die ihn mit $P_0$ verbindende Geodätische. In $P_0$ sei das normierte $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\xi_i$ dann so gewählt, daß ${}_{(1)}\xi_i = \xi_i$ der Tangentenvektor der Geodätischen (9) in $P_0$ ist. Dieses normierte $n$-Bein verschieben wir längs der Geodätischen (9) parallel; da $\xi^i = \xi_i$ längs (9) parallelverschoben ist, so gilt ${}_{(1)}\xi^i = \xi^i$ längs (9) und weiter wegen (8)

$$g_{ik} = \xi_i \xi_k + \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\xi_i \, {}_{(\alpha)}\xi_k \tag{10}$$

in $P$. Die $F_{n-1}$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = a_i x_i = 0 \tag{11}$$

($a_i$ konstant) enthält alle Geodätischen durch $P_0$, deren Richtung in $P_0$ zu $a_i$ normal ist. Nach Annahme (der $R_n$ hat in $P_0$ in jeder Orientierung Ebenen $E_{n-1}$) ist daher (11) eine $E_{n-1}$, und zwar jene, deren Normalenvektor in $P_0$ die Richtung $a_i$ hat. Wir betrachten die $E_{n-1}$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = {}_{(\alpha)}\xi_i(0)\, x_i = 0, \quad (\alpha \neq 1), \tag{12}$$

für die also $a_i = {}_{(\alpha)}\xi_i(0)$ ist. Dann ist[1])

$$\frac{1}{\sqrt{g^{ik}\, {}_{(\alpha)}\xi_i(0)\, {}_{(\alpha)}\xi_k(0)}} \, {}_{(\alpha)}\xi_i(0) \tag{13}$$

nach (7) ein längs jeder Kurve der $E_{n-1}$ (12) parallelverschobener Vektor. Da $\xi^i = {}_{(1)}\xi^i$ in $P_0$ auf ${}_{(\alpha)}\xi^i$ normal steht, so enthält die $E_{n-1}$ (12) die $P_0$ mit $P$ verbindende Geodätische (9). Somit ist (13) ein längs (9) parallelverschobener Vektor, dessen Anfangslage (in $P_0$) ${}_{(\alpha)}\xi_i(0)$ ist, also der von uns mit ${}_{(\alpha)}\xi_i$ bezeichnete Vektor

$${}_{(\alpha)}\xi_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ik}\, {}_{(\alpha)}\xi_i(0)\, {}_{(\alpha)}\xi_k(0)}} \, {}_{(\alpha)}\xi_i(0). \tag{14}$$

Wir zeigen weiter, daß der Normierungsfaktor

$$f(x, {}_{(\alpha)}\xi(0)) = \frac{1}{\sqrt{g^{ik}(x)\, {}_{(\alpha)}\xi_i(0)\, {}_{(\alpha)}\xi_k(0)}}, \quad f(0, {}_{(\alpha)}\xi(0)) = 1, \tag{15}$$

für jeden der Vektoren ${}_{(\alpha)}\xi_i$ des parallelverschobenen $n$-Beins ($\alpha = 2, 3, \ldots, n$)

---

1) In $P_0$ ist natürlich $g^{ik}(0)\, {}_{(\alpha)}\xi_i(0)\, {}_{(\alpha)}\xi_k(0) = \delta_{ik}\, {}_{(\alpha)}\xi_i(0)\, {}_{(\alpha)}\xi_k(0) = 1$, aber nicht außerhalb von $P_0$!

gleich ist: $f(x, {}_{(2)}\xi(0)) = \cdots = f(x, {}_{(n)}\xi(0)) = f(x_1, \ldots, x_n)$.[1]) Sei $\lambda_i(0)$ ein zu $\xi_i$ senkrechter Einheitsvektor in $P_0$; er hat dann die Darstellung

(16) $$\lambda_i(0) = \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\lambda \, {}_{(\alpha)}\xi_i(0).$$

Wir orientieren ihn weiter so, daß in (16) kein Koeffizient ${}_{(\alpha)}\lambda$ verschwindet. Verschieben wir $\lambda_i(0)$ längs (9) parallel nach $P$, so gilt in $P$

(17) $$\lambda_i = \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\lambda \, {}_{(\alpha)}\xi_i$$

mit den Koeffizienten ${}_{(\alpha)}\lambda$ von (16). Neben einer zu (14) analogen Darstellung

(18) $$\lambda_i = \frac{1}{\sqrt{g^{ik}\lambda_i(0)\,\lambda_k(0)}}\,\lambda_i(0) = f\big(x, \lambda(0)\big)\,\lambda_i(0) = \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\lambda f\big(x, \lambda(0)\big)\, {}_{(\alpha)}\xi_i(0)$$

gilt nach (14) und (17) als zweite Darstellung

(19) $$\lambda_i = \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\lambda f(x, {}_{(\alpha)}\xi)\, {}_{(\alpha)}\xi_i(0).$$

Wegen der Unabhängigkeit der Vektoren ${}_{(\alpha)}\xi_i(0)$ $(\alpha = 2, \ldots, n)$ ergibt der Vergleich der Koeffizienten in (18) und (19)

(20) $${}_{(\alpha)}\lambda f(x, {}_{(\alpha)}\xi) = {}_{(\alpha)}\lambda\, f\big(x, \lambda(0)\big),$$

daher wegen ${}_{(\alpha)}\lambda \neq 0$

(21) $$f(x, {}_{(\alpha)}\xi) = f\big(x, \lambda(0)\big),$$

womit die Behauptung bewiesen ist. Führen wir ${}_{(\alpha)}\xi_i = f(x_1, \ldots, x_n)\, {}_{(\alpha)}\xi_i(0)$ in die Darstellung (10) ein, so erhalten wir

(22) $$g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(x) \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\xi_i(0)\, {}_{(\alpha)}\xi_k(0).$$

In $P_0$ ist $f(0) = 1$ und $g_{ik}(0) = \delta_{ik}$, also gilt dort

(23) $$\delta_{ik} = \xi_i \xi_k + \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\xi_i(0)\, {}_{(\alpha)}\xi_k(0).$$

Für $g_{ik}$ ergibt dies endlich

(24) $$g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(x)(\delta_{ik} - \xi_i \xi_k).$$

Da $\xi_i = \xi^i = \frac{x_i}{s}$ ist, so ist der Satz bewiesen, wenn noch gezeigt ist, daß $f(x)$ nur vom geodätischen Abstand $s^2 = x_i x_i$ des Punktes $P$ vom Zentrum $P_0$ abhängt. Zu diesem Zweck wenden wir auf die $E_{n-1}$ $a_i x_i = 0$ das Ebenen-

1) Dieser Normierungsfaktor hängt dann nach (15) nur vom Punkte $P(x_1, \ldots, x_n)$ ab.

kriterium (VI, § 4) an, wozu aber die Kenntnis der Christoffelklammern nötig ist. Wir bilden also, indem wir $\gamma = f^2$ setzen,

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_j}(\delta_{ik} - \xi_i \xi_k) + (1-\gamma)\left(\xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial x_j} + \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right). \tag{25}$$

Nun ist

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial\left(\frac{x_i}{s}\right)}{\partial x_j} = \frac{1}{s}\delta_{ij} - \frac{1}{s^3} x_i x_j = \frac{1}{s}(\delta_{ij} - \xi_i \xi_j), \quad \frac{\partial s}{\partial x_j} = \frac{x_j}{s} = \xi_j,$$

also

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \frac{1}{s}\Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \delta_{ij} - \xi_i \xi_j. \tag{26}$$

Wir erhalten so

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_j}\Delta_{ik} + \frac{1-\gamma}{s}(\xi_i \Delta_{jk} + \xi_k \Delta_{ji}). \tag{27}$$

Wegen $\Delta_{ik}\xi_i = 0$ gilt

$$\begin{aligned} g_{ik}(\xi_i \xi_l + \gamma^{-1}\Delta_{il}) &= (\xi_i \xi_k + \gamma \Delta_{ik})(\xi_i \xi_l + \gamma^{-1}\Delta_{il}) \\ &= \xi_k \xi_l + \Delta_{ik}\Delta_{il} = \xi_k \xi_l + \Delta_{ik}(\delta_{il} - \xi_i \xi_l) = \xi_k \xi_l + \Delta_{kl} = \delta_{kl}, \end{aligned} \tag{28}$$

woraus

$$g^{il} = \xi_i \xi_l + \gamma^{-1}(\delta_{il} - \xi_i \xi_l) \tag{29}$$

folgt. Für die Christoffelklammer

$$\left\{ {ij \atop k} \right\} = \frac{1}{2} g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right)$$

erhalten wir aus (27) und (29)

$$\begin{aligned} \left\{ {ij \atop k} \right\} = \Delta_{ij}\left(\frac{1-\gamma}{s}\xi_k - \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma}{\partial s}\xi_k + \frac{1}{2\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial s}\xi_k - \frac{1}{2\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x_k}\right) \\ + \frac{1}{2\gamma}\left(\Delta_{ik}\frac{\partial \gamma}{\partial x_j} + \Delta_{jk}\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Nun ist notwendig und hinreichend, damit (11) eine $E_{n-1}$ ist, daß aus $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx_i = 0$

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_j} dx_i dx_j = 0 \tag{31}$$

in jedem Punkte ($x_i = \xi^i s$) von $a_i x_i = 0$ folgt. Es muß also (31) eine Folge von $a_i x_i = 0$ (also auch von $a_i \xi^i = 0$) und von $a_i dx_i = 0$ sein. Nun ist

$$\frac{\mathfrak{d}^2 \varphi}{\mathfrak{d} x_i \mathfrak{d} x_j} = -\left\{ {ij \atop k} \right\} a_k, \tag{32}$$

da $\frac{\partial a_i}{\partial x_j} = 0$ ist. Nach (30) ist

$$-\left\{ {ij \atop k} \right\} a_k dx_i dx_j = \Delta_{ij} dx_i dx_j \frac{1}{2\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial x_k} a_k + A, \tag{33}$$

wo $A$ mit $a_i \xi_i = 0$ und $a_i dx_i = 0$ verschwindet. Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit (11) eine $E_{n-1}$ ist, lautet daher

(34) $$\Delta_{ij}\,dx_i\,dx_j\,\frac{\partial \ln\gamma}{\partial x_k}\,a_k = 0$$

als Folge von $a_i dx_i = 0$ und $a_i \xi_i = 0$. Bestimmen wir nun $dx_i$ so, daß $a_i dx_i = 0$ und $\xi_i dx_i = 0$ ist (im $R_n$ für $n > 2$ stets möglich!), so folgt aus $a_i \xi_i = 0$ nach (34)

(35) $$dx_i\,dx_i\,\frac{\partial \ln\gamma}{\partial x_k}\,a_k = 0,$$

also

(36) $$\frac{\partial \ln\gamma}{\partial x_k}\,a_k = 0.$$

Somit ist, da (36) für jedes der Gleichung $a_k \xi_k = 0$ genügende $a_k$ gilt,

(37) $$\frac{\partial \ln\gamma}{\partial x_k} = c\,\xi_k = c\,\frac{\partial s}{\partial x_k}.$$

Längs der Flächen $s =$ konst. ist nach (37) $\gamma$ konstant, also ist $\gamma$ eine Funktion von $s$ allein, w. z. b. w.

Da das Ebenenkriterium notwendig und hinreichend ist, so sind die $F_{n-1}$ (11) in dem durch den Maßtensor (4) charakterisierten $R_n$ in der Tat Ebenen $E_{n-1}$, und daher ist unser Satz bewiesen.[1])

Für spätere Zwecke notieren wir die Form der Christoffelklammer $\left\{ {ij \atop k} \right\}$, bei Berücksichtigung von $\gamma = \gamma(s)$, $\frac{\partial\gamma}{\partial x_k} = \gamma'\,\xi^k$:

(38) $$\left\{ {ij \atop k} \right\} = \Delta_{ij}\,\xi_k\left(\frac{1-\gamma}{s} - \frac{1}{2}\,\gamma'\right) + \frac{\gamma'}{2\gamma}\left(\Delta_{ik}\,\xi_j + \Delta_{jk}\,\xi_i\right).$$

## § 2. Kongruenz eines Riemannschen $R_n$ um einen Punkt $P_0$.

Wir beziehen wie in § 1 den $R_n$ auf Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0$; in $P_0$ sei dabei wieder $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$. Ist $P$ ein Punkt des $R_n$, so ist

(1) $$x_i = \xi^i s$$

mit konstanten $\xi^i$ und $\xi^i \xi^i = 1$ die Gleichung der Geodätischen, die ihn mit $P_0$ verbindet. Der Parameter $s$ ist der auf dieser Geodätischen gemessene Abstand (genauer geodätische Abstand) der Punkte $P_0$ und $P$.

Man kann (1) als eine *ein-eindeutige Zuordnung der Vektoren des Vektorraumes $P_0$ zu den Punkten des $R_n$* auffassen, die im Geltungsgebiet der Normal koordinaten in bezug auf $P_0$ liegen.

Von zwei einander ein-eindeutig zugeordneten Punktmengen

$$\{P, Q, \ldots\} \quad \text{und} \quad \{\overline{P}, \overline{Q}, \ldots\}$$

1) Denn dann gilt (37), und (34) ist eine Folge von $a_k \xi_k = 0$.

des $R_n$ sagen wir, daß sie bezüglich $P_0$ *gleich orientiert* sind, wenn die den Punkten der beiden Mengen im Vektorraum $P_0$ entsprechenden Vektoren gleich orientiert sind, d. h. gleiche Längen und Winkel haben, z. B.

$$\text{Länge } P_0 P = \text{Länge } P_0 \overline{P}, \text{ Winkel } (P P_0 Q) = \text{Winkel } (\overline{P} P_0 \overline{Q}), \text{ usw.}$$

Haben im $R_n$ dann *irgend* zwei, bezüglich eines Punktes $P_0$ gleich orientierte, stetig differenzierbare Kurvenbogen stets gleiche Bogenlängen, so sprechen wir von einer Kongruenz um den Punkt $P_0$.

Allgemeiner nennen wir die Punktmenge $\{P, Q, \ldots\}$ bezüglich $P_0$ mit der ihr ein-eindeutig zugeordneten Punktmenge $\{\overline{P}, \overline{Q}, \ldots\}$ bezüglich $\overline{P}_0$ gleich orientiert, wenn die entsprechenden Vektoren der Vektorräume $P_0$ und $\overline{P}_0$ („entsprechend" im Sinne der Relation (1), also bei Zugrundelegung eines Normalkoordinatensystems mit dem Zentrum $P_0$ und eines zweiten mit dem Zentrum $\overline{P}_0$) gleiche Orientierung besitzen. Haben zwei gleich orientierte Kurvenbogen $C$ und $\overline{C}$ bezüglich $P_0$ und $\overline{P}_0$ dann stets die gleiche Bogenlänge, so sprechen wir von einer Kongruenz um die beiden *Zentren* $P_0$ *und* $\overline{P}_0$.

Die Kongruenz um die zwei Zentren $P_0$ und $\overline{P}_0$ bedingt ihrerseits die Kongruenz um jedes der beiden Zentren $P_0$ und $\overline{P}_0$ für sich (im Sinne der ersten Definition). Eine weitere, weniger evidente Folge der Kongruenz um zwei Zentren $P_0$ und $\overline{P}_0$ ist, wie später gezeigt wird, die Kongruenz um jeden Punkt des $R_n$.

Es bestehe also Kongruenz um die beiden Zentren $P_0$ und $\overline{P}_0$; der Fall $P_0 = \overline{P}_0$ sei dabei nicht ausgeschlossen. In $P_0$ bzw. $\overline{P}_0$ ordnen wir die beiden normierten $n$-Beine

$$(2) \qquad {}_{(\alpha)}V^i \quad \text{bzw.} \quad {}_{(\alpha)}\overline{V}^i,$$

einander zu. Wegen

$$(3) \qquad \xi^i = {}_{(\alpha)}\xi \, {}_{(\alpha)}V^i, \quad \overline{\xi}^i = {}_{(\alpha)}\xi \, {}_{(\alpha)}\overline{V}^i$$

besteht dann eine ein-eindeutige Zuordnung $\xi^i \rightleftarrows \overline{\xi}^i$ der Vektorräume in $P_0$ und $\overline{P}_0$ und weiter eine solche $P \rightleftarrows \overline{P}$ der Punkte des $R_n$, wobei $P$ durch $x_i = \xi^i s$ und $\overline{P}$ durch $\overline{x}_i = \overline{\xi}^i s$, gegeben ist $({}_{(\alpha)}\xi \, {}_{(\alpha)}\xi = 1)$. Dabei sind zugeordnete Kurvenbogen gleich orientiert, haben also *gleiche Bogenlänge.*

Geben wir zugeordneten Punkten gleiche Koordinaten, so werden die Maßtensoren in zugeordneten Punkten gleich sein (d. h. die Komponenten der Maßtensoren sind die nämlichen Funktionen der Koordinaten).

Die Riemannsche Krümmung entsprechender $F_2$-Elemente in $P_0$ und $\overline{P}_0$ ist infolgedessen gleich, und da den normierten $n$-Beinen (2) weiter keine Bedingungen auferlegt sind, so können sie stets so gewählt werden, daß einem beliebigen vorgegebenen $F_2$-Element in $P_0$ ein ebensolches in $\overline{P}_0$ entspricht. Demnach aber ist die Krümmung jedes $F_2$-Elementes in $P_0$ gleich der eines bestimmten in $\overline{P}_0$ und umgekehrt. *Die Riemannschen Krümmungen aller*

*$F_2$-Elemente in $P_0$ und $\overline{P}_0$ sind daher gleich.* Für $P_0 = \overline{P}_0$ folgt daraus die Isotropie des $R_n$ in $P_0$.[1])

Nach dieser Feststellung beweisen wir, daß aus *der Kongruenz um den Punkt $P_0$ des $R_n$ die Existenz aller $E_{n-1}$ durch $P_0$ folgt und umgekehrt.* Zugrunde liegen wie immer Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0$ und mit $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$. In $P_0$ sei das normierte $(n-1)$-Bein

$$ {}_{(\alpha)}V^i \qquad (\alpha = 2, \ldots, n) \tag{4}$$

gegeben. Wir betrachten die in $P_0$ geodätische $F_{n-1}$

$$ x_i = \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}A\, {}_{(\alpha)}V^i \tag{5}$$

und zeigen, daß sie eine Ebene $E_{n-1}$ ist. Sei in $P_0$ $\nu_i = \nu^i$ (es ist $g_{ik}(0) = \delta_{ik}$) der (normierte) Normalenvektor der $F_{n-1}$ (5), der also ${}_{(\alpha)}V^i$ zu einem normierten $n$-Bein ergänzt. Ist dann $\lambda^i$ irgendein Einheitsvektor in $P_0$, so gilt

$$ \lambda^i = \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\lambda\, {}_{(\alpha)}V^i + \varrho\nu^i, \quad \sum_{\alpha=2}^{n} ({}_{(\alpha)}\lambda)^2 + \varrho^2 = 1. \tag{6}$$

Dem Vektor $\lambda^i$ ordnen wir ein-eindeutig den „gespiegelten" Vektor

$$ \overline{\lambda}^i = \sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\lambda\, {}_{(\alpha)}V^i - \varrho\nu^i \tag{7}$$

zu, der dann ebenfalls ein Einheitsvektor ist. Entsprechende Winkel gespiegelter Vektoren sind gleich.

Einem Punkte $P$ mit den Koordinaten $x_i = \xi^i s$ ordnen wir dann den Spiegelpunkt $\overline{P}$ mit den Koordinaten $\overline{x}_i = \overline{\xi}^i s$ zu, wo $\xi^i$ und $\overline{\xi}^i$ gespiegelte Vektoren sind. Auch diese Zuordnung ist ein-eindeutig. Der geometrische Ort der Punkte, die mit ihren gespiegelten identisch sind, ist die $F_{n-1}$ (5). Wegen der Kongruenz um $P_0$ haben gespiegelte Bogen gleiche Längen, und das Spiegelbild einer Geodätischen ist wieder eine Geodätische. Ist daher eine Geodätische gegeben, die in einem Punkte der $F_{n-1}$ (5) mit dieser eine Richtung gemein hat, so muß sie ganz in der $F_{n-1}$ verlaufen, da es sonst zwei Geodätische des $R_n$ gäbe, die ein Linienelement (Punkt und Richtung) gemeinsam haben. Die $F_{n-1}$ (5) und somit jede solche $F_{n-1}$ durch $P_0$ ist also eine Ebene. Die Umkehrung folgt aus dem in § 1 bewiesenen Satz durch einfaches Nachrechnen; wir schlagen einen anderen Weg ein und zeigen, daß der auf Normalkoordinaten bezogene Schursche $R_n$ mit dem Zentrum $P_0$ eine „Bewegungsgruppe" hat, die jedem geometrischen Gebilde ein kongruentes zuordnet und deren Transformationen die Form

$$ \overline{x}_i = a_{ik} x_k \tag{8}$$

1) Vgl. die Anmerkung S. 128.

haben, wobei die Matrix $\|a_{ik}\|$ orthogonal ist. Ist $x_i, dx_i$ ein Linienelement und $\bar{x}_i, d\bar{x}_i$ sein transformiertes, gilt also

$$d\bar{x}_i = a_{ik} dx_k, \tag{9}$$

so ist nach (1, 4)

$$\begin{aligned} g_{ik}(\bar{x}) d\bar{x}_i d\bar{x}_k &= \left[\bar{\xi}_i \bar{\xi}_k (1 - f^2(\bar{s})) + \delta_{ik} f^2(\bar{s})\right] d\bar{x}_i d\bar{x}_k \\ &= (\bar{\xi}_i d\bar{x}_i)^2 (1 - f^2(\bar{s})) + f^2(\bar{s}) d\bar{x}_i d\bar{x}_i \\ &= (\xi_i dx_i)^2 (1 - f^2(s)) + f^2(s) dx_i dx_i = g_{ik} dx_i dx_k, \end{aligned} \tag{10}$$

da ja $\bar{s} = s$, $\xi_i dx_i = \bar{\xi}_i d\bar{x}_i$, $dx_i dx_i = d\bar{x}_i d\bar{x}_i$ ist.

*Ein Schurscher $R_n$ mit dem Zentrum $P_0$ kann also auch durch die Kongruenz um $P_0$ charakterisiert werden.* Einen Punkt $P_0$, um den Kongruenz besteht, nennen wir ein *Drehzentrum.*

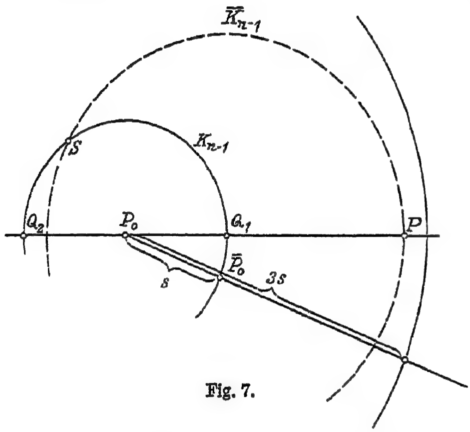

Fig. 7.

Wir beweisen jetzt den schon erwähnten Satz: *Ein $R_n$ mit zwei Drehzentren hat jeden Punkt als Drehzentrum und ist also von konstanter Riemannscher Krümmung.* Sind $P_0$ und $\bar{P}_0$ Drehzentren (Fig. 7), dann ist jeder Punkt der *geodätischen Kugel $K_{n-1}$* mit dem *Mittelpunkt* $P_0$ (d. i. der geometrische Ort der Punkte gleichen geodätischen Abstandes vom Mittelpunkt), die durch $\bar{P}_0$ hindurchgeht, ebenfalls ein Drehzentrum. Die geodätische Entfernung der Punkte $P_0$ und $\bar{P}_0$ sei $s$, ferner sei $P$ ein Punkt des $R_n$, dessen geodätischer Abstand $s_1$ von $P_0$ kleiner als $3s$ ist. Die Geodätische durch $P_0$ und $P$ schneidet die Hyperkugel $K_{n-1}$ in zwei Punkten $Q_1$ und $Q_2$, von denen einer, z. B. $Q_1$, auf demselben von $P_0$ ausgehenden Halbstrahl liegt wie $P$. Da der geodätische Abstand $\overline{PQ_1}$ der Punkte $P$, $Q_1$ kleiner als $2s$ und $\overline{Q_1Q_2} = 2s$ ist, so schneidet die geodätische Kugel $\bar{K}_{n-1}$ mit dem Mittelpunkte $Q_1$, die $P$ enthält, sicher die geodätische Kugel $K_{n-1}$, da ja ein Punkt $Q_1$ der $K_{n-1}$ innerhalb und ein Punkt $Q_2$ der $K_{n-1}$ außerhalb der $\bar{K}_{n-1}$ liegt. Ist $S$ ein Punkt des Durchschnittes $\{K_{n-1} \cdot \bar{K}_{n-1}\}$, so ist er als Punkt der $K_{n-1}$ ein Drehzentrum. Da aber auch $Q_1$ ein Drehzentrum ist, so ist jeder Punkt der Kugelhyperfläche $\bar{K}_{n-1}$, *also auch $P$ ein Drehzentrum.* Auf diese Art kann man in endlich vielen Schritten von jedem Punkt $P$ des $R_n$ zeigen, daß er Drehzentrum ist.

## § 3. Fortsetzung.

Der SCHURsche $R_n$ mit dem Zentrum $P_0$ kann entweder durch die unbeschränkte Existenz der $E_{n-1}$ durch $P_0$ oder durch die Kongruenz um $P_0$ charakterisiert werden. Dies gilt für $n > 2$, da ja für $n = 2$ die Definition durch Ebenen $E_{n-1}$ versagt. Der Begriff der Kongruenz um einen Punkt $P_0$ behält aber auch in diesem Fall seinen Sinn. Es tritt dann allgemein die Frage an uns, ob in RIEMANNschen Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0$ der Maßtensor (1, 4) für die Kongruenz um $P_0$ charakteristisch ist. Hinreichend ist diese Form des Maßtensors $g_{ik}$ jedenfalls; daß sie notwendig ist, soll durch direkte Rechnung gezeigt werden.

Wir setzen also im $R_n$ Kongruenz um $P_0$ voraus und beziehen ihn auf Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0$ und $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$. Dann sind

(1) $$x_i = \xi^i s, \quad \xi^i \xi^i = 1$$

die Gleichungen der Geodätischen durch $P_0$. Man kann, wie wir im vorhergehenden Paragraphen zeigten, (1) als eine ein-eindeutige Zuordnung der Punkte des $R_n$ zu den Vektoren des Vektorraumes $P_0$ auffassen. Zwei ein-eindeutig aufeinander bezogene Punktmengen nannten wir in bezug auf $P_0$ gleich orientiert, falls dies fur die entsprechenden Vektormengen in $P_0$ zutrifft.

Da im Vektorraum $P_0$ mit dem Tensor $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$ „rechtwinklig kartesisch" gemessen wird, so hängen gleich orientierte Vektormengen durch eine orthogonale Transformation

(2) $$\bar{\lambda}^i = a_{ik}\lambda^k, \quad a_{ik}a_{il} = \delta_{kl}$$

zusammen. Somit sind

(3) $$\bar{x}_i = a_{ik}x_k$$

mit orthogonaler Matrix $\|a_{ik}\|$ die verknüpfenden Relationen für bezüglich $P_0$ gleichorientierte Punktmengen. Ist $x_i = x_i(t)$ irgendeine stetig differenzierbare Kurve $C$ des $R_n$, so ist jede in bezug auf $P_0$ mit $C$ gleichorientierte Kurve $\bar{C}$ durch Gleichungen (3) darstellbar, wo rechterhand $x_k = x_k(t)$ zu setzen ist.

Nun besagt aber die Kongruenz um $P_0$, daß die beiden gleichorientierten Kurven gleiche Bogenlängen besitzen. Es muß also

(4) $$g_{ik}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)\, d\bar{x}_i\, d\bar{x}_k = g_{ik}(x_1, \ldots, x_n)\, dx_i\, dx_k$$

oder wegen (3)

(5) $$g_{ik}(a_{1\beta}x_\beta, \ldots, a_{n\beta}x_\beta)\, a_{ip}a_{kq} \equiv g_{pq}(x_1, \ldots, x_n)$$

gelten. Durch Überschiebung mit $a_{rp}a_{tq}$ erhalten wir daraus die äquivalente Beziehung

(6) $$g_{rt}(a_{1\beta}x_\beta, \ldots, a_{n\beta}x_\beta) = g_{pq}(x_1, \ldots, x_n)\, a_{rp}a_{qt}.$$

Wir wählen nun die $a_{ik}$, indem wir in $P_0$ ein normiertes $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\xi_i = {}_{(\alpha)}\xi^i$ mit ${}_{(1)}\xi_i = \xi_i = \frac{x_i}{s}$ (bei Fixierung eines Punktes $P$ mit den Koordinaten $x_i = \xi^i s$) festlegen und

$$a_{ik} = {}_{(i)}\xi^k \tag{7}$$

setzen. Wegen $x_\beta = s\,\xi_\beta$ lautet dann (6)

$$g_{rt}(s, 0, \ldots, 0) = g_{pq}(x_1, \ldots, x_n)\,{}_{(r)}\xi^p\,{}_{(t)}\xi^q. \tag{8}$$

Wegen

$$g_{pq}\,{}_{(1)}\xi^p = {}_{(1)}\xi^q \tag{9}$$

(Normalkoordinaten), ist $g_{pq}\,{}_{(1)}\xi^p\,{}_{(1)}\xi^q = 1$, $g_{pq}\,{}_{(1)}\xi^p\,{}_{(\alpha)}\xi^q = 0$ $(\alpha = 2, \ldots, n)$ also, wenn wir $g_{pq}(s, 0, \ldots, 0) = g_{pq}(s)$ setzen, $g_{11}(s) = 1$, $g_{1\alpha}(s) = 0$.

Aus (8) folgt

$$g_{rr}(s) = g_{pq}(x)\,{}_{(r)}\xi^p\,{}_{(r)}\xi^q, \quad g_{tt}(s) = g_{pq}(x)\,{}_{(t)}\xi^p\,{}_{(t)}\xi^q \quad \left(\begin{smallmatrix}\text{nicht summieren}\\ \text{über } r \text{ und } t\end{smallmatrix}\right). \tag{10}$$

Vertauscht man nun für $r, t \neq 1$ den $r$ten mit dem $t$ten Vektor des normierten Beines, d. h. setzt man ${}_{(r)}\bar{\xi}^p = {}_{(t)}\xi^p$ und ${}_{(t)}\bar{\xi}^p = {}_{(r)}\xi^p$, so folgt, da die linken Seiten von (10) diese Vektoren nicht enthalten,

$$g_{rr}(s) = g_{tt}(s) \qquad (r,\ t = 2, \ldots, n). \tag{11}$$

Allgemein ist

$$g_{rr}(s) = g_{pq}(x)\,\nu^p \nu^q, \tag{12}$$

wenn nur der Einheitsvektor $\nu^p$ in $P_0$ auf $\xi_i$ normal steht. Denn dann können wir $\xi_i$, $\nu_i$ mittels eines normierten $(n-2)$-Beins zu einem normierten $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\bar{\xi}^i$, mit ${}_{(1)}\bar{\xi}^i = \xi^i$ und ${}_{(2)}\bar{\xi}^i = \nu^i$ ergänzen, für das ebenfalls die Relationen (10) gelten. Setzen wir $(r \neq t,\ \ r, t \neq 1,\ \ a, b \neq 0,\ \ a^2 + b^2 = 1)$

$$\nu^p = a\,{}_{(r)}\xi^p + b\,{}_{(t)}\xi^p, \tag{13}$$

so ist $\nu^p$ ein solcher Einheitsvektor, also gilt wegen (11)

$$g_{rr}(s) = (a^2 + b^2)\,g_{rr}(s) + 2ab\,g_{pq}(x)\,{}_{(r)}\xi^p\,{}_{(t)}\xi^q \tag{14}$$

und somit für $r \neq t$

$$g_{rt}(s) = g_{pq}(x)\,{}_{(r)}\xi^p\,{}_{(t)}\xi^q = 0. \tag{15}$$

Nun hat der Maßtensor $g_{ik}(x)$ die Darstellung

$$\left\{\begin{aligned} g_{ik} &= {}_{(\alpha\beta)}g\,{}_{(\alpha)}\xi_i\,{}_{(\beta)}\xi_k, \quad \text{wo} \\ {}_{(\alpha\beta)}g &= g_{ik}\,{}_{(\alpha)}\xi^i\,{}_{(\beta)}\xi^k = g_{\alpha\beta}(s) \end{aligned}\right. \tag{16}$$

ist, da ja das $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\xi_i = {}_{(\alpha)}\xi^i$ mit seinem adjungierten identisch ist. Wir erhalten somit

$$g_{ik} = \xi_i\,\xi_k + f^2(s)\sum_{\alpha=2}^{n} {}_{(\alpha)}\xi_i\,{}_{(\alpha)}\xi_k, \tag{17}$$

wo wir mit $f^2(s)$ den gemeinsamen Wert (11) bezeichnen. Wegen $\sum_{\alpha=1}^{n}{}_{(\alpha)}\xi_i\,{}_{(\alpha)}\xi_k = \delta_{ik}$ gewinnen wir in der Tat die Form (1, 4), d. h.

$$g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(s)\,(\delta_{ik} - \xi_i \xi_k). \tag{18}$$

Wir bringen noch einige ergänzende Bemerkungen.

**A.** Für den $R_2$ ist

$$g_{ik} = \xi_i \xi_k + \gamma(x_1, x_2)\,(\delta_{ik} - \xi_i \xi_k), \quad \gamma(0,0) = 1, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(0,0) = 0 \tag{19}$$

die allgemeinste Form des Maßtensors in Normalkoordinaten mit dem Zentrum (0, 0). Wählen wir in einem Punkte $P$ mit den Koordinaten $\xi^i s$ ein normiertes Zweibein so, daß $\xi_i = {}_{(1)}\xi_i$ ist, so gilt, wenn wir $\eta_i = {}_{(2)}\xi_i$ setzen,

$$g_{ik} = \xi_i \xi_k + \eta_i \eta_k. \tag{20}$$

Bezeichnet $\zeta_i$ einen Vektor, der mit $\xi_i$ „rechtwinklig kartesisch" gemessen ein normiertes Zweibein liefert, so gilt

$$\delta_{ik} = \xi_i \xi_k + \zeta_i \zeta_k, \qquad \xi_i \zeta_i = 0, \;\; \zeta_i \zeta_i = 1.$$

Aus $0 = \xi_1 \zeta_1 + \xi_2 \zeta_2$ und $0 = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2$ (wegen $\xi_i = \xi^i$) aber folgt

$$\zeta_i = f^{-1}(x_1, x_2)\,\eta_i, \quad \text{also} \quad \delta_{ik} = \xi_i \xi_k + f^{-2}(x_1, x_2)\,\eta_i \eta_k,$$

was in (20) eingesetzt die Form (19) des Maßtensors ergibt.

*Der Riemannsche $R_2$ ist also in Normalkoordinaten durch eine Funktion $f(x_1, x_2)$ der Koordinaten charakterisiert.*

**B.** Wir haben immer von Hyperebenen $E_{n-1}$ gesprochen und die Frage nicht erörtert, ob der Charakter des SCHURschen $R_n$ mit dem Zentrum $P_0$ auch durch die unbeschränkte Existenz aller $r$-dimensionalen Ebenen $E_r$ festgelegt ist, wobei $r$ eine feste Zahl $1 < r < n$ ist. Daß diese Frage zu bejahen ist, folgt aus dem Satz: *Die Existenz aller $E_r$* ($r$ fest) *durch $P_0$ bedingt die aller $E_t$* ($t$ beliebig) *durch $P_0$.*

Jede $E_r$ durch $P_0$ hat im Vektorraum $P_0$ als „Orientierung in $P_0$" ihren Tangentenraum daselbst, und es besteht eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den Ebenen $E_r$ durch $P_0$ und den ihnen in $P_0$ entsprechenden Tangentenräumen. Dem Schnitt zweier Ebenen $E_s$ und $E_t$ durch $P_0$ entspricht dabei als Vektorraum in $P_0$ der Schnitt der den Ebenen $E_s$ und $E_t$ in $P_0$ entsprechenden Tangentenräume. Aus der Existenz aller $E_r$ durch $P_0$ folgt daher durch Schnittbildung die der $E_s$ für $s \leqq r$, also auch die aller $E_2$. Umgekehrt zeigen wir, daß die Existenz aller $E_2$ durch $P_0$ die aller $E_r$ durch $P_0$ $(r > 2)$ nach sich zieht. Die Existenz der $E_2$ vorausgesetzt, sei ${}_{(\alpha)}V^i$ $(\alpha = 1, \ldots, r;\; 2 < r \leqq n-1)$ in $P_0$ ein normiertes $r$-Bein des auf Normalkoordinaten mit dem Zentrum

$P_0$ bezogenen $R_n$. Die Gesamtheit der Geodätischen durch $P_0$, deren Richtungen in $P_0$ dem Vektorraum ${}_{(\alpha)}V^i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ angehören, ist eine $E_r$ dieser Orientierung. Denn in der Tat bestimmen ja irgend zwei nicht bereits in einer solchen Geodätischen liegende Punkte dieser Fläche zwei Geodätische durch $P_0$, deren Richtungen in $P_0$ einen in ${}_{(\alpha)}V^i$ $(\alpha = 1, \ldots, r)$ gelegenen zweidimensionalen Vektorraum bestimmen, also eine $E_2$, die ganz in der $E_r$ liegt. Da die beiden Punkte der $E_2$ angehören, so liegt die sie verbindende Geodätische in der $E_2$, also in der $E_r$, d. h. diese ist eine Ebene, w. z. b. w.

C. Jede $E_r$ des $R_n$ konstanter Krümmung ist als RIEMANNscher $R_r$ von konstanter Krümmung. Denn seien $C_1$ und $C_2$ zwei Bogen der $E_r$, die in bezug auf zwei Punkte $P_0$ und $\overline{P}_0$ der $E_r$ gleich orientiert sind, so sind sie ja als Bogen des $R_n$ in bezug auf die beiden Punkte $P_0$ und $\overline{P}_0$ des $R_n$ gleich orientiert und haben daher dieselbe Bogenlänge. *Die Krümmung dieses $R_r$ ($\equiv E_r$) ist genau die des $R_n$.* Wir zeigen allgemeiner, *daß eine in ihrem Punkte $P_0$ geodätische $F_r$ eines (beliebigen) $R_n$ in $P_0$ längs jeder ihrer $F_2$-Elemente (Flächenelemente) durch $P_0$ dieselbe Krümmung hat wie der $R_n$.*[1] Dabei verstehen wir (enger als in VII, § 2) unter einer in $P_0$ geodätischen $F_r$ die Menge aller Punkte der Geodätischen, deren Richtungen in $P_0$ einen $r$dimensionalen Vektorraum bilden.

Beziehen wir den $R_n$ auf Normalkoordinaten mit dem Zentrum $P_0$, so können wir durch eine Transformation $\bar{x}_i = a_{ik} x_k$, wo die $\| a_{ik} \|$ eine orthogonale Matrix bilden, stets erreichen, daß in den neuen Normalkoordinaten

$$x_{r+1} = 0, \quad x_{r+2} = 0, \ldots, x_n = 0 \tag{21}$$

die Gleichung der $F_r$ ist. Dann ist

$$x_i = y_i, \quad (i = 1, \ldots, r) \qquad \text{und} \qquad x_{r+\alpha} = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n-r) \tag{21'}$$

eine Parameterdarstellung $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_r)$ dieser $F_r$. Der Maßtensor $\gamma_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, r)$ der $F_r$ ist dann

$$\gamma_{ik}(y_1, \ldots, y_r) = g_{ik}(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \qquad (i, k = 1, \ldots, r). \tag{22}$$

Da in $P_0$ $(y_1 = \cdots = y_r = 0)$ $\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} = \dfrac{\partial \gamma_{ik}}{\partial y_j} = 0$ gilt, ist

$$\Gamma_{ijkl}(P_0) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \gamma_{jk}}{\partial y_i \partial y_l} + \frac{\partial^2 \gamma_{il}}{\partial y_j \partial y_k} - \frac{\partial^2 \gamma_{jl}}{\partial y_i \partial y_k} - \frac{\partial^2 \gamma_{ik}}{\partial y_j \partial y_l}\right]_{P_0} \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, r) \tag{23}$$

der RIEMANNsche Krümmungstensor der $F_r$ in $P_0$, so daß

$$\Gamma_{ijkl}(P_0) = R_{ijkl}(P_0) \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, r)$$

---

[1] Wir haben dies in VII, § 3 unter Benutzung des verallgemeinerten Riccikalküls nachgewiesen; einen Beweis ohne Verwendung dieses Kalküls kann man ohne größere Rechnung nur in spezialisierten Koordinaten bringen.

ist. Für irgendein in $P_0$ durch zwei Vektoren $\lambda^i$, $\mu^i$ aufgespanntes $F_2$-Element der $F_r$

(24) $$\lambda^i = 0\,,\; \mu^i = 0 \quad \text{für} \quad i > r$$

ist demnach die Krümmung im $R_n$ und die in der $F_r$ die gleiche.

**D.** Sei ein SCHURscher $R_n$ mit dem Zentrum $P_0$ wie immer auf Normalkoordinaten bezogen. Durch ein normiertes Zweibein $\lambda^i$, $\mu^i$ in $P_0$

(25) $$\lambda^i\lambda^i = \mu^i\mu^i = 1\,, \quad \lambda^i\mu^i = 0\,, \quad (g_{ik}(P_0) = \delta_{ik})$$

wird in $P_0$ die $E_2$

(25′) $$x_i = x_i(s, \varphi) = \lambda^i s \cos\varphi + \mu^i s \sin\varphi$$

aufgespannt. Die Parameter $s$ und $\varphi$ mögen die *Polarkoordinaten* in der $E_2$ heißen. Dabei sind die Kurven $s = $ konst. geodätische Kreise (geometrischer Ort aller Punkte des geodätischen Abstandes $s$ von $P_0$), und die Kurven $\varphi = $ konst. die $\infty^1$ Geodätischen der $E_2$ durch $P_0$, die die $E_2$ (25′) erfüllen.

Wir wollen jetzt das Bogenelement $d\sigma$ der $E_2$ in Polarkoordinaten aufstellen. Dazu benötigen wir noch die Formel

(26) $$dx_i = \lambda^i(ds\cos\varphi - s\sin\varphi\, d\varphi) + \mu^i(ds\sin\varphi + s\cos\varphi\, d\varphi)\,.$$

Wegen (25) gilt dann

(27) $$x_i dx_i = s\,ds\,, \quad dx_i dx_i = ds^2 + s^2 d\varphi^2;$$

nach (1, 4) ist somit

$$d\sigma^2 = g_{ik}dx_i dx_k = \frac{(x_i\,dx_i)^2}{s^2} + \gamma(s)\left(dx_i\,dx_i - \frac{(x_i\,dx_i)^2}{s^2}\right) = ds^2 + \gamma(s)\,s^2\,d\varphi^2,$$

oder

(28) $$d\sigma^2 = ds^2 + f^2(s)\,s^2 d\varphi^2,$$

wo wir $f^2(s)$ für das stets positive $\gamma(s)$ setzten. Das Parameternetz der Polarkoordinaten ist orthogonal ($g_{12} = 0$).

## § 4. Der $R_n$ konstanter Krümmung.

Wir sind jetzt in der Lage, die Form des Maßtensors für Räume konstanter Krümmung, bezogen auf Normalkoordinaten mit irgendeinem Zentrum $P_0$, anzugeben. Es handelt sich dabei darum, die in (3, 18) auftretende Funktion $f(s)$ zu bestimmen.

Wir gehen von der Tatsache aus, daß jede in einen $R_n$ eingebettete $E_r$ in jedem Punkte und für jedes $F_2$-Element durch diesen Punkt dieselbe RIEMANNsche Krümmung wie der $R_n$ hat.

Es sei $P_0$ der Ursprung RIEMANNscher Normalkoordinaten. Durch ein normiertes Zweibein $\lambda^i, \mu^i$ in $P_0$ wird die zweidimensionale Ebene

$$x_i = \lambda^i s \cos\varphi + \mu^i s \sin\varphi \tag{1}$$

aufgespannt, die wir auf Polarkoordinaten $u_1 = s$, $u_2 = \varphi$ beziehen. Dann hat der Maßtensor $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2)$ nach (3, 28) die Gestalt

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = s^2 f^2(s). \tag{2}$$

Die RIEMANNsche Krümmung eines auf rechtwinklige Koordinaten $(g_{12} = 0)$ bezogenen $R_2$ ist aber nach einer im ersten Band (V, § 3) hergeleiteten Formel

$$k = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\,\frac{\partial g_{22}}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}\,g_{22}}}\,\frac{\partial g_{11}}{\partial u_2}\right)\right], \tag{3}$$

also wegen (2)

$$k = -\frac{1}{sf}\,\frac{d}{ds}(sf' + f), \tag{4}$$

so daß[1])

$$sf'' + 2f' + skf = 0 \tag{5}$$

die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die unbekannte Funktion $f(s)$ ist, die wir nach (1, 4) für die Anfangswerte $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$ zu lösen haben. Setzen wir in (5)

$$\psi = sf, \tag{6}$$

so folgt wegen

$$\psi' = sf' + f, \quad \psi'' = sf'' + 2f' \tag{6'}$$

aus (5)

$$\psi'' + k\psi = 0 \tag{7}$$

als Differentialgleichung zweiter Ordnung für $\psi(s)$, die wir für die Anfangswerte $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$ zu lösen haben.

Wir behandeln zunächst den *euklidischen Fall* $k = 0$. Für $k = 0$ wird $\psi = s$, also $f = 1$; für den Maßtensor (1, 4)

$$g_{ik} = \xi_i \xi_k + f^2(s)\,(\delta_{ik} - \xi_i \xi_k) \tag{8}$$

ergibt das

$$g_{ik} = \delta_{ik}. \tag{8'}$$

Die Normalkoordinaten des euklidischen $R_n$ mit $g_{ik}(P_0) = \delta_{ik}$ sind nichts anderes als die geläufigen rechtwinkligen kartesischen Koordinaten.

Ist $k \neq 0$, so ist

$$\psi(s) = \frac{e^{\sqrt{-k}\,s} - e^{-\sqrt{-k}\,s}}{2\sqrt{-k}} \tag{9}$$

1) Man ersieht aus (4), daß auch der SCHURsche $R_n$ durch die Angabe der Krümmung $k$ als Funktion des geodätischen Abstandes vom Zentrum $P_0$ $(k = k(s))$ völlig bestimmt ist.

die Lösung von (7) für die angegebenen Anfangswerte. *Wir haben demnach zwei wesentlich verschiedene Fälle, je nachdem die konstante Raumkrümmung $k$ positiv oder negativ ist.*

**A.** *Positives $k$*: Dann ist

$$\psi(s) = \frac{\sin(\sqrt{k}\,s)}{\sqrt{k}}, \tag{9'}$$

also

$$f(s) = \frac{\sin(\sqrt{k}\,s)}{\sqrt{k}\,s}, \tag{10}$$

und der Maßtensor (1, 4) lautet

$$g_{ik} = \xi_i\,\xi_k + \frac{\sin^2(\sqrt{k}\,s)}{k\,s^2}(\delta_{ik} - \xi_i\,\xi_k). \tag{11}$$

**B.** *Negatives $k$*: Führt man $\operatorname{sh}\tau = \frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2}$ ein, so wird

$$\psi(s) = \frac{1}{\sqrt{-k}}\operatorname{sh}(\sqrt{-k}\,s), \tag{12}$$

also

$$f(s) = \frac{\operatorname{sh}(\sqrt{-k}\,s)}{\sqrt{-k}\,s}, \tag{13}$$

und der Maßtensor (1, 4) lautet

$$g_{ik} = \xi_i\,\xi_k - \frac{\operatorname{sh}^2(\sqrt{-k}\,s)}{k\,s^2}(\delta_{ik} - \xi_i\,\xi_k). \tag{14}$$

Gibt es Räume konstanter Krümmung, so hat der Maßtensor eines solchen in Normalkoordinaten die Form (8′), (11) oder (14), je nachdem $k = 0$, $k > 0$ oder $k < 0$ ist. Ob nun die so gewonnenen Riemannschen Räume tatsächlich von konstanter Krümmung sind, kann man entweder durch die etwas langwierige direkte Rechnung nachweisen oder aber durch Schlüsse anderer Natur, z. B. durch den Nachweis der unbeschränkten Existenz von Ebenen, aus der dann die Kongruenz um jeden Punkt und weiter die Konstanz der Raumkrümmung folgt.

Wir gehen im folgenden diesen Weg, untersuchen aber zunächst den Geltungsbereich der Normalkoordinaten für die durch (8′), (11) und (14) gegebenen Räume. Aus (8) folgt für das quadrierte Bogenelement $d\sigma^2$

$$d\sigma^2 = (\xi_i\,dx_i)^2 + f^2(s)\,[dx_i\,dx_i - (\xi_i\,dx_i)^2], \tag{15}$$

wo

$$f^2(s)\begin{cases} = 1 & \text{für } k = 0 \\ = \dfrac{\sin^2(\sqrt{k}\,s)}{k\,s^2} & \text{für } k > 0 \\ = \dfrac{\operatorname{sh}^2(\sqrt{-k}\,s)}{-k\,s^2} & \text{für } k < 0 \end{cases} \tag{15'}$$

ist. Nun ist nach der bekannten SCHWARZschen Ungleichung

$$(\xi_i dx_i)^2 \leqq (\xi_i \xi_i)(dx_i dx_i) = dx_i dx_i;$$

für $dx_i \neq 0$ ist also $d\sigma^2$ nur Null, wenn zugleich $f^2(s) = 0$ und $\xi_i dx_i = 0$ ist. Für reelle $s$ (andere haben keine Bedeutung) tritt dies nur für $k > 0$ ein, und zwar zum ersten Male für

$$s = \frac{\pi}{\sqrt{k}}. \tag{16}$$

Die Normalkoordinaten können nur bis zu dieser Hyperkugelfläche[1]) (sie enthält die Punkte des geodätischen Abstandes $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ vom Zentrum $P_0$) funktionieren. Während also für $k \leqq 0$ keine Einschränkung betreffs des Geltungsbereiches der Normalkoordinaten besteht, muß für $k > 0$

$$k\, x_i x_i < \pi^2 \tag{16'}$$

sein. Wir erfassen diesen Tatbestand sofort, wenn wir zeigen, daß der RIEMANNsche $R_n$ mit der positiven Krümmung $k$ als solcher mit der in einem euklidischen $R_{n+1}$ eingebetteten $n$ dimensionalen Kugel vom Radius $a = \frac{1}{\sqrt{k}}$ identisch ist. Es sei der euklidische $R_{n+1}$ auf rechtwinklige kartesische Koordinaten $y_1, \ldots, y_{n+1}$ bezogen und

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n+1}^2 = a^2 \tag{17}$$

eine $n$ dimensionale Kugel. Den Punkt $O_1$ mit den Koordinaten $y_1 = 0, \ldots, y_n = 0$, $y_{n+1} = a$ machen wir zum Zentrum von Normalkoordinaten $x_1, \ldots, x_n$ auf der Kugel. Sei $\xi^i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ ein Einheitsvektor des Tangentenraumes in $O_1$, so gilt wegen $\xi^{n+1} = 0$ (dies charakterisiert diesen Vektorraum)

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i)^2 = 1.$$

In $O_1$ wird durch den Vektor $\xi^i$ und den in die $y_{n+1}$-Achse gerichteten Einheitsvektor $\delta_{i\,n+1}$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ eine $E_2$ bestimmt, die die Kugel in einem größten Kreise (also einer Geodätischen) schneidet, dessen Richtung in $O_1$ eben dieser Vektor $\xi^i$ ist.

Unter dem geodätischen Abstand $s$ eines Punktes $P$ dieses Kreises von $O_1$ verstehen wir den kleineren der beiden Bogen $\widehat{O_1 P}$. Dann sind

$$x_i = \xi^i s \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die Normalkoordinaten des Punktes $P$.

Sei $\eta^i$ der euklidische Vektor[2]) der Länge $a$, der in der $E_2$ liegend vom Kugelmittelpunkte $y_1 = \cdots = y_{n+1} = 0$ nach $P(y_1, \ldots, y_{n+1})$ gerichtet ist. Sein

1) Richtiger „Pseudosphäre“, denn sie artet in einen Punkt aus, den Pol von $P_0$.

2) Vektor in bezug auf die Gruppe der euklidischen Drehungen um $x_i = 0$.

Winkel mit der $y_{n+1}$-Achse (beziehungsweise dem Vektor $\delta_{i\,n+1}$) ist $\frac{s}{a}$, und somit gilt die Darstellung

(18) $$\eta^i = a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \xi^i + a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \delta_{i\,n+1} \qquad (i = 1, \ldots, n+1)$$

Die Vektorgleichung (18) kann auch

(18′) $$\begin{cases} y_i = a \sin\left(\frac{s}{a}\right) \xi^i & (i = 1, \ldots, n) \\ y_{n+1} = a \cos\left(\frac{s}{a}\right) \end{cases}$$

geschrieben werden, da $\eta^i = y_i$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ ist. Aus (18′) bilden wir nach (1, 26)

(19) $$\begin{cases} d y_i = \frac{a}{s} \sin\left(\frac{s}{a}\right) \Delta_{ik} d x_k + \cos\left(\frac{s}{a}\right) \xi^i d s, \quad \Delta_{ik} = \delta_{ik} - \xi^i \xi^k \\ d y_{n+1} = -\sin\left(\frac{s}{a}\right) d s \end{cases}$$

und erhalten für das Bogenelement der Kugel nach (19)

$$d\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n+1} d y_i^2 = d s^2 + \frac{a^2 \sin^2 \frac{s}{a}}{s^2} \Delta_{ik} \Delta_{ij} d x_k d x_j, \quad (\Delta_{ik} \xi^i = 0).$$

Wegen $\Delta_{ik} \Delta_{ij} = \Delta_{ik} \delta_{ij} = \Delta_{kj}$ und $\xi^k d x_k = d s$ folgt weiter

(20) $$d\sigma^2 = \left[\xi^k \xi^j + \frac{a^2 \sin^2\left(\frac{s}{a}\right)}{s^2} (\delta_{kj} - \xi^k \xi^j)\right] d x_k d x_j,$$

also

(20′) $$g_{kj} = \frac{x_k x_j}{s^2} + \frac{\sin^2\left(\frac{s}{a}\right)}{\left(\frac{s}{a}\right)^2} \left(\delta_{kj} - \frac{x_k x_j}{s^2}\right),$$

d. h. die Kugelfläche hat, wenn wir jetzt $a = \frac{1}{\sqrt{k}}$ setzen, in der Tat den Maßtensor (11).

Mit der Feststellung der Identität des Riemannschen $R_n$ konstanter positiver Krümmung mit der $n$dimensionalen Kugel eines euklidischen $R_{n+1}$[1])

1) Es soll damit keineswegs gesagt sein, daß die Kugel als einzige geschlossene Mannigfaltigkeit die Maßform des $R_n$ konstanter positiver Krümmung besitzt. Identifiziert man vielmehr auf ihr diametral gegenüberliegende Punkte, so erhält man wieder eine geschlossene Mannigfaltigkeit derselben positiven Krümmung, aber topologisch verschiedener Natur.

Aber auch differentialgeometrisch zeigt diese Fläche von der Kugel abweichende Eigenschaften. Vor allem bestimmen nun zwei Punkte ausnahmslos die sie enthaltende Geodätische, ferner sind die Geodätischen wie auf der Kugel geschlossen, haben aber die halbe Länge von denen der Kugel.

ist unser Interesse für die Räume konstanter positiver Krümmung eigentlich erschöpft. Wir werden aber unsere Vertrautheit mit solchen Räumen benutzen, um einen Schluß zu ziehen, der uns auch für die Räume konstanter negativer Krümmung ein wichtiges Ergebnis liefert; und zwar handelt es sich um die Aufstellung der Gleichungen der Ebenen $E_{n-1}$.

Wir erhalten ja diese $E_{n-1}$ auf der Kugel (17) durch den Schnitt mit einer den Kugelmittelpunkt enthaltenden $E_n$

$$\sum_{i=1}^{n+1} A_i y_i = 0. \tag{21}$$

Wollen wir demnach die Gleichung in den Normalkoordinaten $x_1, \ldots, x_n$ haben, so sind nur die Werte (18′) in (21) einzuführen. Somit ist

$$A_i \xi_i \tan \frac{s}{a} + A_{n+1} = 0 \tag{22}$$

oder

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = A_i \xi_i \tan \frac{s}{a} = \text{konst.}, \quad \left(\xi_i = \xi^i = \frac{x_i}{s}\right), \tag{22′}$$

die Gleichung der $E_{n-1}$ in Normalkoordinaten.

Wir bezeichnen, um beide Fälle $k>0$ und $k<0$ unter einem behandeln zu können, die Funktionen $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ und die Hyperbelfunktionen $\operatorname{sh}\alpha$, $\operatorname{ch}\alpha$, $\operatorname{th}\alpha$ einheitlich mit $\operatorname{Sin}\alpha$, $\operatorname{Cos}\alpha$, $\operatorname{Tan}\alpha$. Setzen wir noch $\sigma = \sqrt{|k|}\,s$, so haben die Maßtensoren (11) und (14) die einheitliche Form

$$g_{ik} = \xi_i \xi_k + \frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}(\delta_{ik} - \xi_i \xi_k). \tag{23}$$

Nun haben wir für $k > 0$ bereits gezeigt, daß $\left(a = \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = A_i \xi_i \operatorname{Tan}\sigma = \text{konst.} \tag{24}$$

die Gleichungen der $E_{n-1}$ unseres $R_n$ konstanter positiver Krümmung sind; wir vermuten und werden dies bestätigt finden, daß (24) auch für den $R_n$ konstanter negativer Krümmung die Gleichungen der $E_{n-1}$ sind.

Wir führen den Ebenennachweis für beide Fälle $k > 0$, $k < 0$ gemeinsam durch. Es sei dabei festgesetzt, daß, sobald in einer Formel ein doppeltes Vorzeichen vorkommt $(\ldots \pm A, \ldots \mp A)$, das obenstehende Zeichen dem Fall $k > 0$ und das untenstehende dem Fall $k < 0$ entspricht. Beispielsweise ist

$$\sigma = s\sqrt{\pm k}.$$

Nach dem allgemeinen Ebenenkriterium muß (notwendig und hinreichend), damit $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = c$ eine Ebene ist,

$$\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ {ik \atop j} \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) d x_i\, d x_k = 0 \tag{25}$$

aus $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i = 0$ und $\varphi = c$ folgen.[1]) Für die Rechnung benötigen wir die Christoffelklammern $\left\{ {ij \atop k} \right\}$, die wir uns aus (1, 38) verschaffen. Dabei ist jetzt $\gamma = \frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}$. Wir erhalten

$$(26)\quad \left\{ {ik \atop j} \right\} = \Delta_{ik}\xi_j\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}{\sigma^2}\right)\sqrt{\pm k} + (\Delta_{ij}\xi_k + \Delta_{kj}\xi_i)\left(\frac{1}{\operatorname{Tan}\sigma} - \frac{1}{\sigma}\right)\sqrt{\pm k}.$$

Ferner haben wir die Ableitungen der Funktion (24) nach den Koordinaten zu bilden. Bei Verwendung der Formeln

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \xi_i = \xi^i,\quad \frac{\partial \xi_k}{\partial x_i} = \frac{1}{s}\Delta_{ki},\quad \Delta_{ki} = \delta_{ki} - \xi_k\xi_i$$

erhalten wir

$$(27)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \left[\frac{A_i}{\sigma}\operatorname{Tan}\sigma - \varphi\,\xi_i\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}\right)\right]\sqrt{\pm k},$$

oder wegen $\xi_i\xi_i = 1$

$$(28)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\xi_i = \frac{\varphi}{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}\sqrt{\pm k}.$$

Die weitere Differentiation von (27) liefert

$$(29)\quad \pm\frac{1}{k}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k} = -\frac{A_i}{\sigma^2}\xi_k\operatorname{Tan}\sigma + \frac{A_i\xi_k}{\sigma\operatorname{Cos}^2\sigma} - \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\xi_i\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}\right)$$
$$- \varphi\frac{\Delta_{ik}}{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}\right) + \varphi\frac{\xi_i\xi_k}{\sigma^2} - \frac{\varphi\,\xi_i\xi_k}{\operatorname{Sin}^2\sigma} \pm \frac{\varphi\,\xi_i\xi_k}{\operatorname{Cos}^2\sigma}.$$

Nun ist $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i = 0$ nach (27) gleichbedeutend mit

$$(30)\qquad \frac{A_i dx_i}{\sigma}\operatorname{Tan}\sigma = \varphi\xi_i\,dx_i\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}\right).$$

Für die Differentiale $dx_i$, für die (30), also $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i = 0$ gilt, liefert (29)

$$(31)\quad \pm\frac{1}{k\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_k}dx_i\,dx_k = (\xi_i\,dx_i)^2\left(\frac{1}{\sigma\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma} - \frac{2}{\operatorname{Sin}^2\sigma} + \frac{1}{\sigma^2}\right)$$
$$- \frac{dx_i\,dx_i}{\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}\right).$$

Ebenso gilt nach (26), (27) und (28)

$$(32)\quad \pm\frac{1}{k\varphi}\left\{ {ik \atop j} \right\}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} = \Delta_{ik}\frac{1}{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}\left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma}{\sigma^2}\right)$$
$$- 2\left(\frac{1}{\operatorname{Tan}\sigma} - \frac{1}{\sigma}\right)\xi_i\xi_k\frac{1}{\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma} + (\cdots)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} + (\cdots)\frac{\partial\varphi}{\partial x_k},$$

1) Im folgenden Paragraphen geben wir einen analogen, aber weniger Rechnung erfordernden Beweis; dieser mag ruhig überschlagen werden. Was die Prämisse $\varphi = c$ betrifft, so besagt sie infolge der Willkür von $c$ in unserem Fall nichts.

also für die Richtungen $d x_i$, für die $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d x_i = 0$ ist,

$$(33) \qquad \pm \frac{1}{k \varphi} \left\{ {ik \atop j} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d x_i d x_k = - \frac{d x_i d x_i}{\sigma} \left( \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\operatorname{Sin} \sigma \operatorname{Cos} \sigma} \right) + (\xi_i d x_i)^2 \left( \frac{1}{\sigma \operatorname{Sin} \sigma \operatorname{Cos} \sigma} - \frac{2}{\operatorname{Sin}^2 \sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \right).$$

Somit gilt

$$(34) \qquad \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \left\{ {ik \atop j} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right] d x_i d x_k = 0$$

als Folge von $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d x_i = 0$, w. z. b. w.

Zu $n$ Punkten

$$(35) \qquad x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(n)}$$

gibt es, falls ihre Determinante nicht verschwindet, nach (24) genau eine sie enthaltende $E_{n-1}$. Demnach gibt es genau eine $E_{n-1}$, die in einem Punkte des $R_n$ eine vorgegebene Orientierung ($n-1$-Bein in dem Punkt) besitzt. *Das bedeutet aber die unbeschränkte Ebenenexistenz, also die konstante Krümmung unseres $R_n$.*

## § 5. Die projektiven Koordinaten im $R_n$ konstanter Krümmung. Die Bewegungsgruppen.

Wir wollen ein Koordinatensystem *projektiv* nennen, wenn in ihm die Gleichungen der Geodätischen die lineare Gestalt $x_i = a_i t + b_i$ mit konstanten $a_i$ und $b_i$ annehmen. Ist $x_1, \ldots, x_n$ ein projektives Koordinatensystem, so ist jedes durch eine Transformation der projektiven Gruppe daraus entstehende Koordinatensystem ebenfalls projektiv, womit der Name „projektives Koordinatensystem" seine Rechtfertigung findet.

Nur die Räume konstanter Krümmung können auf projektive Koordinaten bezogen werden, denn ist $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ ein solches Koordinatensystem, so stellt

$$A_i \bar{x}_i = \text{konst.}$$

mit beliebigen konstanten $A_i$ eine Ebene $E_{n-1}$ dar, d. h. im betreffenden $R_n$ gibt es $E_{n-1}$ in jeder Orientierung. Um in unserem (auf Normalkoordinaten $x_i$ bezogenen) $R_n$ konstanter Krümmung projektive Koordinaten $\bar{x}_i$ einzuführen, genügt es, die Transformation

$$(1) \qquad \bar{x}_i = \frac{x_i}{s} \operatorname{Tan} \sigma, \quad \sigma = \sqrt{\pm k}\, s, \quad s^2 = x_i x_i$$

vorzunehmen. Nach (4, 24) ist dann

$$(2) \qquad A_i \bar{x}_i = \text{konst.}$$

mit konstanten $A_i$ die allgemeine Gleichung einer Ebene $E_{n-1}$.

Für $k > 0$ gilt wegen $\operatorname{Tan}\sigma = \tan\left(\sqrt{k}\,s\right)$ die Transformation (1) nur im Bereiche

$$(3)\qquad 0 \leqq s \leqq \frac{\pi}{2\sqrt{k}}.$$

Das gewonnene Bezugssystem ist ein spezielles unter den verschiedenen projektiven, es ist in dem Sinne das einfachste, daß in ihm die Gleichungen der Bewegungsgruppe eine ebenso einfache als übersichtliche Gestalt annehmen. Man überlege die geometrische Bedeutung der Transformation (1) an der im euklidischen $R_{n+1}$ liegenden, den $R_n$ konstanter positiver Krümmung repräsentierenden Kugel. Die Koordinaten $\bar{x}_i$ sind $\left(\text{bis auf den Faktor } -\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ rechtwinklige kartesische Koordinaten in der die Kugelfläche im Pol von $O_1$ tangierenden $E_n$, vom Kugelmittelpunkt auf die obere Halbkugel (3) projiziert.[1])

Als erstes und wichtigstes haben wir den Maßtensor $\bar{g}_{ik}$ im neuen Bezugssystem zu berechnen. Setzen wir $\xi_i = \frac{x_i}{s}$, so folgt aus (1) und (1, 26)

$$(4)\qquad \begin{aligned} d\bar{x}_i &= \frac{\Delta_{ij}}{s}\operatorname{Tan}\sigma\, dx_j + \frac{\xi_i\xi_j}{\operatorname{Cos}^2\sigma}\sqrt{\pm k}\, dx_j \\ &= \frac{\sqrt{\pm k}}{\operatorname{Cos}^2\sigma}\left(\xi_i\xi_j + \frac{1}{\sigma}\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma\,\Delta_{ij}\right) d\,x_j, \end{aligned}$$

wo $\Delta_{ij} = \delta_{ij} - \xi_i\xi_j$ ist.

Setzen wir für den Augenblick $\alpha = \frac{1}{\sigma}\operatorname{Sin}\sigma\operatorname{Cos}\sigma$, so folgt aus

$$\bar{g}_{ik}\, d\bar{x}_i\, d\bar{x}_k = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

wegen (4)

$$(5)\qquad \pm k\bar{g}_{ik}(\xi_i\xi_j + \alpha\Delta_{ij})(\xi_k\xi_l + \alpha\Delta_{kl})\,dx_j dx_l = \operatorname{Cos}^4\sigma\, g_{jl}\,dx_j dx_l,$$

also nach (4, 23)

$$(6)\qquad \pm k\,\bar{g}_{ik}(\xi_i\xi_j + \alpha\Delta_{ij})(\xi_k\xi_l + \alpha\Delta_{kl}) = \operatorname{Cos}^4\sigma\left(\xi_j\xi_l + \frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}\Delta_{jl}\right).$$

Nun ist

$$(7)\qquad (\xi_i\xi_j + \alpha\Delta_{ij})(\xi_j\xi_h + \alpha^{-1}\Delta_{jh}) = \xi_i\xi_h + \Delta_{ih} = \delta_{ih};$$

durch Überschiebung von (6) mit

$$(\xi_j\xi_h + \alpha^{-1}\Delta_{jh})\;(\xi_l\xi_t + \alpha^{-1}\Delta_{lt})$$

erhalten wir daher

$$(8)\qquad \begin{aligned} \pm k\,\bar{g}_{ht} &= \operatorname{Cos}^4\sigma\left(\xi_h\xi_l + \alpha^{-1}\frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}\Delta_{hl}\right)(\xi_l\xi_t + \alpha^{-1}\Delta_{lt}) \\ &= \operatorname{Cos}^4\sigma\left(\xi_h\xi_t + \alpha^{-2}\frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}\Delta_{ht}\right) = \operatorname{Cos}^4\sigma\left(\xi_h\xi_t + \frac{1}{\operatorname{Cos}^2\sigma}\Delta_{ht}\right), \end{aligned}$$

---

1) $O_1$ war das Zentrum der RIEMANNschen Normalkoordinaten, und zwar der Kugelpunkt $y_1 = \cdots = y_n = 0$, $y_{n+1} = a$; also hat sein Pol die Koordinaten $y_1 = \cdots = y_n = 0$, $y_{n+1} = -a$.

also

(8′) $$\pm k\,\bar g_{ht} = \mathrm{Cos}^2\sigma\,(\Delta_{ht} + \mathrm{Cos}^2\sigma\,\xi_h\,\xi_t).$$

Um die Komponenten $\bar g_{ht}$ in den Koordinaten $\bar x_1, \ldots, \bar x_n$ auszudrücken, berechnen wir

(9) $$\bar s^2 = \bar x_i \bar x_i = \mathrm{Tan}^2\sigma, \quad \bar s = \mathrm{Tan}\,\sigma.$$

Daraus folgt $$\pm\,\bar s^2\,\mathrm{Cos}^2\sigma = \pm\,\mathrm{Sin}^2\sigma = 1 - \mathrm{Cos}^2\sigma,$$

also

(9′) $$\mathrm{Cos}^2\sigma = \frac{1}{1\pm\bar s^2}, \quad 1-\mathrm{Cos}^2\sigma = \pm\frac{\bar s^2}{1\pm\bar s^2}.$$

Ferner ist

(9″) $$\bar\xi_i = \frac{\bar x_i}{\bar s} = \frac{x_i}{s} = \xi_i.$$

Unter Benutzung von (9) erhalten wir also

(10) $$\pm\,k\,\bar g_{ht} = \frac{1}{1\pm\bar s^2}\left(\delta_{ht} \mp \frac{\bar x_h \bar x_t}{1\pm\bar s^2}\right).$$

Ist $k<0$, so ist $\mathrm{Tan}\,\sigma \leqq 1$, also $\bar s \leqq 1$. Daher bedeutet $1-\bar s^2$ im Nenner von (10) keinerlei Einschränkung für den Geltungsbereich der Koordinaten $\bar x_1, \ldots, \bar x_n$. Deuten wir aber die $\bar x_1, \ldots, \bar x_n$ als die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten eines auf diese Art definierten Bildes unseres $R_n$ konstanter negativer Krümmung, so besteht dieses aus den inneren Punkten der euklidischen Einheitskugel $\bar x_i\,\bar x_i = 1$. Darüber mehr im folgenden Paragraphen!

Wir wollen nun zeigen, daß in den Räumen konstanter Krummung *Bewegungsgruppen* existieren. Wir bleiben bei den eben eingeführten projektiven Koordinaten und lassen die zur Unterscheidung von den Normalkoordinaten gesetzten Querstriche wieder weg. Im Fall $k>0$ kommt man ohne Schwierigkeit zu der gesuchten Bewegungsgruppe, wenn man die euklidischen Drehungen der Kugel $y_1^2 + \cdots + y_{n+1}^2 = a^2$ eines euklidischen $R_{n+1}$ um ihren Mittelpunkt in den Koordinaten auf der Kugel ausdrückt. Für diese Drehungen gilt

$$\bar y_j = a_{jl}\,y_l \qquad (j, l = 1, \ldots, n+1)$$

mit orthogonaler Matrix $\|a_{jl}\|$. Nach (4, 18′) folgt daraus für Normalkoordinaten $z_i$ auf der Kugel (im folgenden laufen $i, j, l$ usw. und die Summationen, wenn nicht anders angegeben, stets von 1 bis $n$)

$$\frac{\bar z_j}{\bar s}\sin\frac{\bar s}{a} = a_{jl}\frac{z_l}{s}\sin\frac{s}{a} + a_{j\,n+1}\cos\frac{s}{a},$$

$$\cos\frac{\bar s}{a} = a_{n+1\,l}\frac{z_l}{s}\sin\frac{s}{a} + a_{n+1\,n+1}\cos\frac{s}{a},$$

was, in den projektiven Koordinaten (1) ausgedrückt[1]), auf die Transformation

$$\bar{x}_i = \frac{a_{ik} x_k + a_{i\,n+1}}{a_{n+1\,k} x_k + a_{n+1\,n+1}} \tag{11}$$

führt. Wir behaupten nun, daß *die Transformationen* (11) *die Bewegungsgruppe des $R_n$ bilden, wenn im Fall $k > 0$ die Matrix $\|a_{ik}\|$, im Fall $k < 0$ die Matrix*

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & -i a_{1\,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & -i a_{n\,n+1} \\ i a_{n+1\,1} & \ldots & i a_{n+1\,n} & a_{n+1\,n+1} \end{matrix} \right\| \tag{11'}$$

*orthogonal ist* $\left(i = \sqrt{-1}\right)$. Fur $k < 0$ gilt demnach

$$\left\{ \begin{aligned} & a_{ik} a_{il} - a_{n+1\,k} a_{n+1\,l} = \delta_{kl} \qquad \text{(auch für } k = n+1 \text{ oder } l = n+1) \\ & a_{i\,n+1} a_{i\,n+1} - a^2_{n+1\,n+1} = -1 \qquad (k = l = n+1). \end{aligned} \right. \tag{12}$$

Wir geben zunächst für $k < 0$ den Nachweis, daß die Transformationen (11) überhaupt eine Gruppe bilden (für $k > 0$ geht das aus der obigen Herleitung hervor). Die Matrix (11′), die aus $\|a_{ik}\|$ durch Multiplikation der letzten Zeile mit $i$ und der letzten Spalte mit $-i$ entsteht, bezeichnen wir mit $\|a^0_{ik}\|$. Ist dann

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{b_{ji} \bar{x}_i + b_{j\,n+1}}{b_{n+1\,i} \bar{x}_i + b_{n+1\,n+1}} \tag{13}$$

eine zweite Transformation mit der Eigenschaft (12), so folgt aus (11) und (13)

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{b_{ji}(a_{ik} x_k + a_{i\,n+1}) + b_{j\,n+1}(a_{n+1\,k} x_k + a_{n+1\,n+1})}{b_{n+1\,i}(a_{ik} x_k + a_{i\,n+1}) + b_{n+1\,n+1}(a_{n+1\,k} x_k + a_{n+1\,n+1})}. \tag{14}$$

Diese Transformation hat die Form

$$\bar{\bar{x}}_j = \frac{c_{jk} x_k + c_{j\,n+1}}{c_{n+1\,k} x_k + c_{n+1\,n+1}},$$

wo

$$c_{jk} = b_{ji} a_{ik} \qquad (i, j, k = 1, \ldots, n+1) \tag{15}$$

ist. Sind $c^0_{jk}$ und $b^0_{jr}$ die Matrizen, die aus $c_{jk}$ und $b_{jr}$ so gebildet sind wie (11′) aus $a_{ik}$, so folgt aus (15)

$$c^0_{jk} = b^0_{jr} a^0_{rk} \qquad (j, k, r = 1, \ldots, n+1),$$

und da $a^0_{ik}$ und $b^0_{ik}$ orthogonale Matrizen sind, gilt dasselbe für $c^0_{ik}$, d. h. die $c_{ik}$ genügen den Gleichungen (12).

---

1) In (1) bedeuten die $x_i$ Normalkoordinaten, die wir jetzt mit $z_i$ bzw. $\bar{z}_i$ bezeichnen, während die $\bar{x}_i$ in (1) projektive Koordinaten sind, die jetzt $x_i$ bzw. $\bar{x}_i$ heißen. Die Transformation (11) wird dabei als *Punkttransformation* im $R_n$ aufgefaßt ($x_i$ und $\bar{x}_i$ sind die Koordinaten zweier „entsprechender" Punkte in bezug auf ein *festes* Koordinatensystem).

Wir bringen nun weiter den Nachweis, daß *durch jede Transformation dieser Gruppe ein geometrisches Gebilde in ein kongruentes übergeführt wird,* was wir eben durch den Namen „Bewegungsgruppe" kennzeichnen wollten. Wir führen den Nachweis für die beiden Fälle $k > 0$ und $k < 0$ gemeinsam und setzen zur Abkürzung

(16) $$N = a_{n+1k}\, x_k + a_{n+1n+1}.$$

Aus (11) folgt

$$\begin{aligned}
\bar{s}^2 = \bar{x}_i \bar{x}_i &= \frac{1}{N^2}\,(a_{ik}\, x_k + a_{in+1})\,(a_{il}\, x_l + a_{in+1}) \\
&= \frac{1}{N^2}\,(a_{ik} a_{il}\, x_k x_l + 2 a_{ik} a_{in+1}\, x_k + a_{in+1} a_{in+1}) \\
&= \frac{1}{N^2}\,[(\delta_{kl} \mp a_{n+1k} a_{n+1l})\, x_k x_l + 2(\mp a_{n+1k} a_{n+1n+1})\, x_k \pm 1 \mp a^2_{n+1\,n+1}] \\
&= \frac{1}{N^2}\,(x_k x_k \pm 1) \mp \frac{1}{N^2}\,(a_{n+1k}\, x_k + a_{n+1n+1})^2 = \frac{1}{N^2}\,(s^2 \pm 1) \mp 1,
\end{aligned}$$

also ist

(17) $$\bar{s}^2 \pm 1 = \frac{1}{N^2}\,(s^2 \pm 1).$$

Bemerkt sei, daß im Fall $k < 0$ die Hyperfläche $s = 1$ nach (17) durch eine Transformation (11) in sich übergeführt wird (im Fall $k > 0$ gilt dasselbe für die imaginäre Hyperfläche $s = \sqrt{-1}$). Die Punkte dieser Hyperfläche, die nach (10) nicht mehr dem Bereich der projektiven Koordinaten angehören, sind die *unendlich fernen* oder *uneigentlichen* Punkte des Raumes konstanter negativer Krümmung, worauf wir noch zurückkommen. Weiter folgt aus (11)

(18) $$d\bar{x}_i = \frac{1}{N^2}\,[N a_{ik}\, d x_k + (a_{ik}\, x_k + a_{in+1})\, M],$$

wo zur Abkürzung

(18′) $$M = -\,a_{n+1\,k}\, d x_k$$

gesetzt ist, und daraus

(19) $$\begin{aligned}
N^4 d\bar{x}_i d\bar{x}_i &= N^2 a_{ik}\, a_{ih}\, d x_k\, d x_h + 2MN (a_{il}\, a_{ih}\, x_l\, d x_h + a_{in+1}\, a_{ih}\, d x_h) \\
&\quad + M^2 (a_{il}\, a_{ij}\, x_l\, x_j + 2 a_{ij}\, a_{in+1}\, x_j + a_{in+1}\, a_{in+1}) \\
&= N^2 (\delta_{kh} \mp a_{n+1k}\, a_{n+1h})\, d x_k\, d x_h + 2MN [(\delta_{lh} \mp a_{n+1l}\, a_{n+1h})\, x_l\, d x_h \\
&\quad \mp a_{n+1h}\, a_{n+1\,n+1}\, d x_h] + M^2 [(s^2 \pm 1) \mp N^2] \\
&= N^2 d x_i\, d x_i + 2MN x_i\, d x_i + M^2 (s^2 \pm 1),
\end{aligned}$$

also

(20) $$d\bar{x}_i d\bar{x}_i = \frac{1}{N^4}\,[N^2 d x_i d x_i + 2MN x_i d x_i + M^2 (s^2 \pm 1)].$$

Durch Differentiation von (17) ergibt sich

(21) $$\bar{x}_i d\bar{x}_i = \frac{1}{N^2}\, x_i d x_i + (s^2 \pm 1)\, \frac{M}{N^3}.$$

Nach (17), (20) und (21) ist

$$
\begin{aligned}
\pm k g_{ik}(\bar{x}) d\bar{x}_i d\bar{x}_k &= \frac{1}{1 \pm \bar{s}^2}\left(\delta_{ik} \mp \frac{\bar{x}_i \bar{x}_k}{1 \pm \bar{s}^2}\right) d\bar{x}_i d\bar{x}_k \\
&= \frac{N^2}{1 \pm s^2}\left[\frac{1}{N^4}(N^2 dx_i dx_i + 2MNx_i dx_i + M^2(s^2 \pm 1))\right. \\
&\quad \left. \mp \frac{N^2}{1 \pm s^2}\left(\frac{(x_i dx_i)^2}{N^4} + 2(s^2 \pm 1)x_i dx_i \frac{M}{N^5} + (s^2 \pm 1)^2 \frac{M^2}{N^6}\right)\right] \\
&= \frac{N^2}{1 \pm s^2}\left[\frac{dx_i dx_i}{N^2} \mp \frac{(x_i dx_i)^2}{N^2(1 \pm s^2)}\right] = \frac{1}{1 \pm s^2}\left(\delta_{ik} \mp \frac{x_i x_k}{1 \pm s^2}\right) dx_i dx_k,
\end{aligned} \tag{22}
$$

also

$$g_{ik}(\bar{x}) d\bar{x}_i d\bar{x}_k = g_{ik}(x) dx_i dx_k, \tag{23}$$

womit der Nachweis, daß (11), (12) eine Bewegungsgruppe ist, geliefert ist.

Aus der Form (11), (12) der Bewegungsgruppe folgt ohne Rechnung das (bereits bekannte) Resultat, daß *die Hyperflächen $A_i x_i =$ konst. Ebenen sind.* Betrachten wir nämlich neben der Matrix $a_{ik}$ $(i, k = 1, \ldots, n+1)$ eine zweite, die wir mit $b_{ik}$ bezeichnen und die aus der ersten durch Vertauschung der ersten und zweiten Zeile entsteht, so daß

$$
\begin{cases} a_{ik} = b_{ik} & (i = 3, \ldots, n+1;\ k = 1, \ldots, n+1) \\ a_{1k} = b_{2k}, \quad a_{2k} = b_{1k} & (k = 1, \ldots, n+1) \end{cases} \tag{24}
$$

ist. Der Matrix $b_{ik}$ entspricht dann wieder eine Transformation der Bewegungsgruppe

$$\tilde{x}_i = \frac{b_{ik} x_k + b_{i\,n+1}}{b_{n+1\,k} x_k + b_{n+1\,n+1}}. \tag{25}$$

Durch Elimination der $x_1, \ldots, x_n$ aus (11) und (25) ergibt sich infolge der Gruppeneigenschaft zwischen den $\bar{x}_i$ und den $\tilde{x}_i$ eine Transformation der Bewegungsgruppe. Die Punkte, die bei dieser Transformation in sich transformiert werden, für die also $\bar{x}_i = \tilde{x}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt (die „Inzidenzmenge" dieser Transformation), entsprechen der durch

$$\frac{a_{ik} x_k + a_{i\,n+1}}{a_{n+1\,k} x_k + a_{n+1\,n+1}} = \frac{b_{ik} x_k + b_{i\,n+1}}{b_{n+1\,k} x_k + b_{n+1\,n+1}} \qquad (i, k = 1, \ldots, n) \tag{26}$$

oder

$$(a_{2k} - a_{1k}) x_k = - a_{2\,n+1} + a_{1\,n+1} \tag{27}$$

definierten Urbildmenge, die also eine $F_{n-1}$ ist; dasselbe gilt von ihrem „Bilde", der Inzidenzmenge $\bar{x} = \tilde{x}_i$. Die Inzidenzmenge (wir können jetzt von ihr als $n-1$ dimensionaler Mannigfaltigkeit sprechen) ist eine Ebene, da sie ja jede Geodätische ganz enthalten muß, mit der sie ein Element „Punkt plus Richtung" (kontravarianter Vektor) gemeinsam hat; andernfalls ergäbe die „Bewegung" $\bar{x}_i \longrightarrow \tilde{x}_i$ eine zweite, von ihr verschiedene Geodätische, die mit ihr dieses Element gemeinsam hätte. Also ist auch die durch (27) dargestellte Mannigfaltigkeit eine Ebene $E_{n-1}$. Da man aber jede „lineare" $F_{n-1}: A_i x_i =$ konst. in der Form (27) anschreiben kann,[1]) so ist jede solche $F_{n-1}$ eine $E_{n-1}$, w. z. b. w.

Wir wollen noch kurz überlegen, daß es neben (11) keine weiteren Transformationen der Bewegungsgruppe gibt, womit der Name Bewegungsgruppe für die Gruppe (11) erst vollends gerechtfertigt ist, da ja (11) bloß eine Untergruppe der Bewegungsgruppe sein könnte. Nun folgt dies aus der Tatsache, daß es stets eine Transformation $T$ in (11) gibt, die einen Punkt $P$ und ein normiertes $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ in $P$ in einen Punkt $\overline{P}$ und in ein normiertes $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\overline{\lambda}^i$ in $\overline{P}$ transformiert. Wäre dann $S$ eine nicht in (11) auftretende Transformation gleicher Eigenschaft, so ließe $S T^{-1}$ den Punkt $P$ und das normierte $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$ in $P$ und demnach alle Punkte des $R_n$ fest. Also ist $S T^{-1}$ die identische Transformation und somit $S = T$.

Wie die Räume konstanter positiver Krümmung als Kugeln in euklidischen Räumen einbettbar sind, *so sind die Räume konstanter negativer Krümmung in den pseudoeuklidischen Räumen, den Räumen der speziellen Relativitätstheorie einbettbar.* Ein pseudoeuklidischer $R_{n+1}$ ist ein $n+1$ dimensionaler Punktraum, dessen Maßform in geeigneten Koordinaten $y_1, \ldots, y_{n+1}$ die Gestalt

(28) $$d\sigma^2 = dy_1^2 + \cdots + dy_n^2 - dy_{n+1}^2$$

hat. Der pseudoeuklidische $R_{n+1}$ ist *kein* RIEMANNscher $R_{n+1}$, da seine Maßform nicht positiv definit ist. Er enthält in der Tat drei Arten von Vektoren. Je nachdem

$$(\lambda^1)^2 + \cdots + (\lambda^n)^2 - (\lambda^{n+1})^2 = g_{ik}\lambda^i\lambda^k$$

größer, kleiner oder gleich Null ist, heißt der Vektor $x_1, \ldots, x_{n+1}; \lambda^1, \ldots, \lambda^{n+1}$ *raumartig, zeitartig oder Nullvektor*. Eine $F_n$ des $R_{n+1}$, deren Tangentenraum in jedem Punkte ausschließlich raumartige Vektoren enthält, ist ein RIEMANNscher $R_n$. Ein Beispiel dafür sind die euklidischen $F_n: y_{n+1} =$ konst.

Als zweites Beispiel sei *für negatives* $k$ die $F_n$

(29) $$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 - y_{n+1}^2 = \frac{1}{k}$$

betrachtet. Vom Koordinatenursprung $y_1 = 0, \ldots, y_{n+1} = 0$ projizieren wir die $E_n$

(30) $$y_1 = x_1, \; y_2 = x_2, \ldots, \quad y_n = x_n, \; y_{n+1} = -1$$

1) Man kann eine Matrix $a_{ik}$ der Bewegungsgruppe stets mit Berücksichtigung von $a_{2k} - a_{1k} = \varrho A_k$ bestimmen. Dies läuft geometrisch darauf hinaus, in einem euklidischen (pseudoeuklidischen) $R_{n+1}$ mit der Maßform $dx_1^2 + \cdots + dx_n^2 \pm dx_{n+1}^2$ zwei Einheitsvektoren $-a_{1k}$, $a_{2k}$ so zu konstruieren, daß der Summenvektor $a_{2k} - a_{1k}$ die gegebene Richtung $A_k$ hat.

auf den Teil der $F_n$ (29), dessen $y_{n+1}$ negativ ist. Ist $y_1, \ldots, y_{n+1}$ die Projektion des Punktes (30), so gilt

(31) $$y_i = \varrho x_i \;{\scriptstyle (i=1,\ldots,n)}, \quad y_{n+1} = -\varrho,$$

was in (29) eingetragen $\varrho^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1) = \frac{1}{k}$, also

(32) $$\varrho = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\,\frac{1}{\sqrt{-k}}, \quad s^2 = x_i x_i$$

ergibt (die Wurzeln positiv genommen). Ordnen wir der $F_n$ (29) die $x_1, \ldots, x_n$ als Parameter zu, so ist

(33) $$\sqrt{-k}\, y_i = \frac{x_i}{\sqrt{1-s^2}}, \quad \sqrt{-k}\, y_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \qquad {\scriptstyle (i=1,\ldots,n)}$$

ihre Parameterdarstellung. Aus (33) folgt $(s\,ds = x_k dx_k)$

(34) $$\sqrt{-k}\, d y_i = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}}\left(dx_i + \frac{x_i x_k\, dx_k}{1-s^2}\right), \quad \sqrt{-k}\, dy_{n+1} = -\frac{x_k\, dx_k}{(1-s^2)^{3/2}},$$

also wegen (28)

(35) $$-k\, d\sigma^2 = \frac{1}{1-s^2}\left(dx_i\, dx_i + 2\frac{(x_i\, dx_i)^2}{1-s^2} + \frac{s^2(x_i\, dx_i)^2}{(1-s^2)^2} - \frac{(x_i\, dx_i)^2}{(1-s^2)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1-s^2}\left(dx_i\, dx_i + \frac{(x_i\, dx_i)^2}{1-s^2}\right).$$

Der Vergleich mit (10) ergibt die *Identität* der $F_n$ (29) *mit dem Raum konstanter negativer Krümmung.*

## § 6. Die Klein-Cayleysche projektive Darstellung der Räume konstanter negativer Krümmung.

Wir berechnen in unseren projektiven Koordinaten (§ 5) den geodätischen Abstand zweier Punkte $P_0\left(\overset{0}{x}_i\right)$ und $P_1\left(\overset{1}{x}_i\right)$. Die Punkte des geodätischen Bogenstückes $\widehat{P_0 P_1}$ sind analytisch durch

(1) $$x_i = \overset{0}{x}_i + \alpha\left(\overset{1}{x}_i - \overset{0}{x}_i\right) \;{\scriptstyle (i=1,\ldots,n)}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq 1$$

definiert, da im projektiven Koordinatensysteme die Geodätischen durch lineare Gleichungen $x_i = a_i t + b_i$ gegeben sind. Wir setzen zur Abkürzung

(2) $$\varDelta x_i = \overset{1}{x}_i - \overset{0}{x}_i, \quad p = \pm \varDelta x_i \varDelta x_i, \quad q = \pm \overset{0}{x}_i \varDelta x_i, \quad r = 1 \pm \overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i.$$

Es gilt dann

(2') $$\begin{cases} x_i = \overset{0}{x}_i + \alpha \varDelta x_i, \qquad d x_i = \varDelta x_i\, d\alpha, \\ s^2 = x_i x_i = \overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i + 2\overset{0}{x}_i \varDelta x_i \alpha + \varDelta x_i \varDelta x_i \alpha^2 = \pm(r-1) \pm 2 q\alpha \pm p\alpha^2, \\ dx_i\, dx_i = \varDelta x_i\, \varDelta x_i\, d\alpha^2 = \pm p\, d\alpha^2, \\ x_i\, dx_i = \left(\overset{0}{x}_i \varDelta x_i + \alpha \varDelta x_i \varDelta x_i\right) d\alpha = \pm(q + p\alpha)\, d\alpha. \end{cases}$$

Das Vorzeichen oben (unten) entspricht dem Fall $k > 0$ ($k < 0$).

*Erster Fall:* $k > 0$:

Der Maßtensor $g_{ik}$ ist hier durch

$$k\, g_{ik} = \frac{1}{1+s^2}\left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{1+s^2}\right)$$

gegeben. Nun ist nach (2')

$$(2'') \qquad 1 + s^2 = p\alpha^2 + 2q\alpha + r.$$

Bezeichnen wir das Bogenelement der Geodätischen (1) mit $d\sigma$, so haben wir

$$(3) \qquad k\, d\sigma^2 = \frac{d\alpha^2}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r}\left(p - \frac{(q+\alpha p)^2}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r}\right) = \frac{d\alpha^2 (pr - q^2)}{(p\alpha^2 + 2q\alpha + r)^2},$$

also

$$(4) \qquad \sqrt{k}\, d\sigma = \frac{d\alpha \sqrt{pr - q^2}}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r}.$$

Da $1 + s^2 = p\alpha^2 + 2q\alpha + r > 0$ ist, so ist $pr > q^2$. Für die Bogenlänge $\overline{P_0 P_1}$ ergibt (4)

$$(4') \qquad \sqrt{k}\,\sigma = \sqrt{pr - q^2}\int_0^1 \frac{d\alpha}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r}.$$

Dieses Integral, das mittels elementarer Methoden auswertbar ist, hat für $pr - q^2 > 0$ den Wert

$$(5) \qquad \int_0^1 \frac{d\alpha}{p\alpha^2 + 2q\alpha + r} = \frac{1}{\sqrt{pr - q^2}} \operatorname{arctan} \frac{pr - q^2}{r + q}.$$

Für den geodätischen Abstand $P_0 P_1$, den wir arc $P_0 P_1$ schreiben, erhalten wir somit

$$(6) \qquad \sqrt{k} \operatorname{arc} P_0 P_1 = \operatorname{arctan} \frac{pr - q^2}{r + q}.$$

Um diesen Ausdruck als Funktion der Koordinaten $\overset{0}{x}_i$, $\overset{1}{x}_i$ allein zu erhalten, berechnen wir

$$(7) \qquad pr - q^2 = \Delta x_i \Delta x_i + \Delta x_i \Delta x_i \overset{0}{x}_k \overset{0}{x}_k - \overset{0}{x}_i \Delta x_i \overset{0}{x}_k \Delta x_k$$
$$= \Delta x_i \Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{ik} (\Delta x_i \overset{0}{x}_k - \Delta x_k \overset{0}{x}_i)^2 = \Delta x_i \Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{ik} (\overset{1}{x}_i \overset{0}{x}_k - \overset{1}{x}_k \overset{0}{x}_i)^2,$$

$$(7') \qquad r + q = 1 + \overset{0}{x}_i \overset{1}{x}_i.$$

Somit wird

$$(8) \qquad \sqrt{k} \operatorname{arc} P_0 P_1 = \operatorname{arctan} \frac{\sum\limits_i \left(\overset{0}{x}_i - \overset{1}{x}_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum\limits_{ik}\left(\overset{1}{x}_i \overset{0}{x}_k - \overset{1}{x}_k \overset{0}{x}_i\right)^2}{1 + \overset{0}{x}_i \overset{1}{x}_i}.$$

*Zweiter Fall:* $k < 0$:

Der Maßtensor hat hier die Form

$$-k g_{ik} = \frac{1}{1-s^2}\left(\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{1-s^2}\right).$$

Es gilt

$$1 - s^2 = p\alpha^2 + 2q\alpha + r, \tag{9}$$

$$-k\,d\sigma^2 = \frac{d\alpha^2}{p\alpha^2+2q\alpha+r}\left(-p + \frac{(q+\alpha p)^2}{p\alpha^2+2q\alpha+r}\right) = \frac{d\alpha^2}{(p\alpha^2+2q\alpha+r)^2}\,(q^2-rp),$$

$$\sqrt{-k}\,d\sigma = \sqrt{q^2-rp}\,\frac{d\alpha}{p\alpha^2+2q\alpha+r}, \tag{9'}$$

$$\sqrt{-k}\,\operatorname{arc} P_0P_1 = \sqrt{q^2-rp}\int_0^1 \frac{d\alpha}{p\alpha^2+2q\alpha+r}. \tag{10}$$

Nun ist für $q^2 - rp > 0$ ((9) verschwindet für $s = \pm 1$!)

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{p\alpha^2+2q\alpha+r} = \frac{1}{2\sqrt{q^2-rp}}\left(\ln\frac{p+q-\sqrt{q^2-rp}}{p+q+\sqrt{q^2-rp}} - \ln\frac{q-\sqrt{q^2-rp}}{q+\sqrt{q^2-rp}}\right) \tag{10'}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{q^2-rp}}\ln\frac{q+r+\sqrt{q^2-rp}}{q+r-\sqrt{q^2-rp}},$$

daher wird (10)

$$\sqrt{-k}\,\operatorname{arc} P_0P_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{q+r+\sqrt{q^2-rp}}{q+r-\sqrt{q^2-rp}}. \tag{11}$$

Wegen

$$\begin{cases} q^2 - rp = \sum\limits_i \left(\overset{1}{x}_i - \overset{0}{x}_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum\limits_{ik}\left(\overset{1}{x}_i\overset{0}{x}_k - \overset{1}{x}_k\overset{0}{x}_i\right)^2 \\ q + r = 1 - \overset{0}{x}_i\overset{1}{x}_k \end{cases} \tag{12}$$

können wir statt (11) auch schreiben

$$\sqrt{-k}\,\operatorname{arc} P_0P_1 = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\overset{0}{x}_i\overset{1}{x}_i + \sqrt{\sum\limits_i\left(\overset{1}{x}_i-\overset{0}{x}_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum\limits_{ik}\left(\overset{1}{x}_i\overset{0}{x}_k - \overset{1}{x}_k\overset{0}{x}_i\right)^2}}{1-\overset{0}{x}_i\overset{1}{x}_i - \sqrt{\sum\limits_i\left(\overset{1}{x}_i-\overset{0}{x}_i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum\limits_{ik}\left(\overset{1}{x}_i\overset{0}{x}_k - \overset{1}{x}_k\overset{0}{x}_i\right)^2}}. \tag{13}$$

Aus (11) folgt, daß $\operatorname{arc} P_0P_1$ unendlich wird, wenn im Argument des Logarithmus (11) der Zähler oder der Nenner verschwindet, d. h. wenn

$$q^2 - rp = (q+r)^2$$

oder

$$r(2q + r + p) = 0$$

gilt. $r = 0$ heißt $\overset{0}{x}_i\overset{0}{x}_i = 1$. Der zweite Faktor wird

$$2q + r + p = 1 - \overset{0}{x}_i\overset{0}{x}_i - \varDelta x_i \varDelta x_i - 2\overset{0}{x}_i\varDelta x_i = 1 - \overset{1}{x}_i\overset{1}{x}_i.$$

Der geodätische Abstand zweier Punkte $P_0$, $P_1$ des $R_n$ wird demnach nie unendlich, sofern wir nicht den $R_n$ durch die Punkte der $F_{n-1}: x_i x_i = 1$ abschließen. Von den Punkten dieser Hyperfläche hat jeder eigentliche Punkt des $R_n$ unendlich großen Abstand, sie ist also der Ort der unendlich fernen Punkte des $R_n$. Der Abstand arc $P_0 P_1$ verschwindet, wenn das Argument des Logarithmus gleich eins ist, d. h. wenn

$$0 = q^2 - rp = \Delta x_i \Delta x_i - \Delta x_i \Delta x_i \overset{0}{x}_k \overset{0}{x}_k + \left(\overset{0}{x}_i \Delta x_i\right)^2.$$

Nun ist $\overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i < 1$ in jedem eigentlichen Punkt des $R_n$, also ist die obige Relation nur für $\Delta x_i = 0$ zu befriedigen, d. h. für $\overset{1}{x}_i = \overset{0}{x}_i$. Dieses ohnehin evidente Ergebnis haben wir nur der Vollständigkeit wegen hingeschrieben.

Nun finden wir bei Benutzung der Formel (11) Anschluß an Felix Kleins Darstellung der Räume konstanter negativer Krümmung.

Wir denken uns den euklidischen $R_n$ auf rechtwinklige kartesische Koordinaten $x_i$ bezogen und betrachten die Punktmenge

$$x_i x_i < 1, \tag{14}$$

deren Berandung die Kugel

$$s^2 = x_i x_i = 1 \tag{14'}$$

bildet. Sind $P_0(\overset{0}{x}_i)$ und $P_1(\overset{1}{x}_i)$ zwei Punkte der Menge (14), so verbinden wir sie durch die euklidische Gerade

$$x_i = \overset{0}{x}_i + \Delta x_i t. \tag{14''}$$

Für die auf der Berandung (14') gelegenen beiden Punkte dieser Geraden gilt

$$x_i x_i = 1 = \overset{0}{x}_i \overset{0}{x}_i + 2 \overset{0}{x}_i \Delta x_i t + \Delta x_i \Delta x_i t^2,$$

also

$$p t^2 + 2 q t + r = 0. \tag{15}$$

Bezeichnen wir diese Berandungspunkte mit $M$, $N$, so gilt für deren Parameterwerte

$$t_M = \frac{-q - \sqrt{q^2 - rp}}{p}, \quad t_N = \frac{-q + \sqrt{q^2 - rp}}{p}. \tag{16}$$

Für das euklidisch gemessene Doppelverhältnis der vier Punkte $P_0$, $P_1$, $M$ und $N$, das wir in der üblichen Weise mit $(P_0 P_1 M N)$ bezeichnen, ergibt dies

$$(P_0 P_1 M N) = \frac{q + \sqrt{q^2 - rp}}{q - \sqrt{q^2 - rp}} \cdot \frac{p + q - \sqrt{q^2 - rp}}{p + q + \sqrt{q^2 - rp}} \tag{17}$$

oder wegen (10') und (11)

$$\sqrt{-k}\ \mathrm{arc}\ P_0 P_1 = \frac{1}{2} \ln (P_0 P_1 M N). \tag{18}$$

Diese Abstandsdefinition für die Punkte der Menge (14) ist der Ausgangspunkt der projektiven Darstellung KLEINS für die Räume konstanter negativer Krümmung. Infolge des projektiven Charakters der rechten Seite von (18) kann man natürlich zur Konstruktion dieser Räume statt der Punktmenge (14) jede ihr „projektiv kongruente" verwenden.[1])

Für den ersten Fall $k > 0$ kommt man durch analoge Rechnung zu einer imaginären Fundamentalfläche.

## § 7. Konforme Abbildung der Räume konstanter Krümmung auf den euklidischen $R_n$.

Wir üben auf die RIEMANNschen Normalkoordinaten $x_i$ (§ 4) die Transformation

(1) $$\bar{x}_i = 2\frac{x_i}{\sigma}\operatorname{Cot}\frac{\sigma}{2}, \quad \sigma = s\sqrt{\pm k}$$

aus und berechnen in den Koordinaten $\bar{x}_i$ den Maßtensor. Aus (1) folgt

(2) $$\sqrt{\pm k}\, d\bar{x}_i = 2\frac{\Delta_{ij}}{s}dx_j \operatorname{Cot}\frac{\sigma}{2} - \frac{\xi_i\xi_j dx_j}{\operatorname{Sin}^2\frac{\sigma}{2}}\sqrt{\pm k},$$

also

(3) $$d\bar{x}_i = -\frac{dx_j}{\operatorname{Sin}^2\frac{\sigma}{2}}[\xi_i\xi_j + \alpha\Delta_{ij}],$$

wo

(4) $$\alpha = -2\operatorname{Sin}\frac{\sigma}{2}\operatorname{Cos}\frac{\sigma}{2}\frac{1}{s\sqrt{\pm k}} = -\frac{\operatorname{Sin}\sigma}{\sigma}$$

ist. Nun ist nach (4, 23)

(5) $$\bar{g}_{ik}d\bar{x}_i d\bar{x}_k = g_{ik}dx_i dx_k = \left[\xi_i\xi_k + \frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}(\delta_{ik} - \xi_i\xi_k)\right]dx_i dx_k$$

---

1) Sei $P(x_i)$ ein Punkt der Menge $x_i x_i < 1$. Wir betrachten den (jedenfalls nicht reellen) die Kugel $x_i x_i = 1$ berührenden Kegel mit der Spitze $P$. Ist $\lambda^i$ ein Vektor dieses Kegels, so hat

$$(x_i + \lambda^i t)(x_i + \lambda^i t) = x_i x_i + 2t x_i \lambda^i + t^2 \lambda^i \lambda^i = 1$$

nach Annahme eine Doppelwurzel $t$. Also ist $(x_i x_i - 1)\lambda^i\lambda^i - (x_i\lambda^i)^2 = 0$ die Gleichung für die Richtungen $\lambda^i$ dieses Kegels. Wir können diese Gleichung auch

$$\frac{1}{1 - x_i x_i}\left(\delta_{ik} + \frac{x_i x_k}{1 - x_i x_i}\right)\lambda^i\lambda^k = 0$$

oder nach (5, 10) : $g_{ik}\lambda^i\lambda^k = 0$ schreiben.

Man kann demnach die Kugel $x_i x_i = 1$ ebenso *zur Winkelmessung heranziehen, wie wir sie zur Messung von Längen verwendeten.* Vgl. dazu III, § 2.

und somit wegen (3) und (4)

$$(6)\qquad \bar{g}_{ik}\left[\frac{dx_j}{\operatorname{Sin}^2\frac{\sigma}{2}}(\xi_i\xi_j+\alpha\Delta_{ij})\right]\left[\frac{dx_l}{\operatorname{Sin}^2\frac{\sigma}{2}}(\xi_k\xi_l+\alpha\Delta_{kl})\right]$$
$$=\left[\xi_j\xi_l+\frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}(\delta_{jl}-\xi_j\xi_l)\right]dx_j\,dx_l,$$

also

$$(7)\qquad \bar{g}_{ik}(\xi_i\xi_j+\alpha\Delta_{ij})(\xi_k\xi_l+\alpha\Delta_{kl})=\left(\xi_j\xi_l+\frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}\Delta_{jl}\right)\operatorname{Sin}^4\frac{\sigma}{2}.$$

Durch Überschiebung von (7) mit $(\xi_j\xi_h+\alpha^{-1}\Delta_{jh})(\xi_l\xi_t+\alpha^{-1}\Delta_{lt})$ folgt

$$(8)\qquad \bar{g}_{ht}=\left(\xi_h\xi_t+\alpha^{-2}\frac{\operatorname{Sin}^2\sigma}{\sigma^2}\Delta_{ht}\right)\operatorname{Sin}^4\frac{\sigma}{2}=(\xi_h\xi_t+\Delta_{ht})\operatorname{Sin}^4\frac{\sigma}{2}$$

oder

$$(9)\qquad \bar{g}_{ht}=\delta_{ht}\operatorname{Sin}^4\frac{\sigma}{2}.$$

Nun ist nach (1), wenn wir $\bar{s}^2=\bar{x}_i\bar{x}_i$ setzen,

$$(10)\qquad \pm k\bar{s}^2=4\operatorname{Cot}^2\frac{\sigma}{2}=4\frac{\left(1\mp\operatorname{Sin}^2\frac{\sigma}{2}\right)}{\operatorname{Sin}^2\frac{\sigma}{2}},$$

woraus

$$(10')\qquad \operatorname{Sin}^2\frac{\sigma}{2}=\frac{\pm 4}{4+k\bar{s}^2}$$

oder wegen (9)

$$(11)\qquad \bar{g}_{ik}=\frac{16}{(4+k\bar{s}^2)^2}\,\delta_{ik}$$

folgt. Der Riemannsche $R_n$ konstanter Krümmung $k$ ist also auf den euklidischen $R_n$ konform abgebildet, wenn wir jenen auf das vorliegende Koordinatensystem und diesen auf rechtwinklige kartesische Koordinaten beziehen und dann Punkte gleicher $n$-Tupel einander zuordnen. In der Tat folgt ja aus (11) die Gleichheit der entsprechenden Winkel entsprechender Figuren in beiden Räumen.

# IX. Die $l$ dimensionalen Hyperflächen des $n$ dimensionalen Raumes konstanter Krümmung. Das Formenproblem.

## § 1. Die invarianten $J_k$-Räume der $F_l$.

Die beiden Grundformen einer Fläche des euklidischen $R_3$ bestimmen diese bis auf Kongruenz und Spiegelung (Band 1, V). Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß dieser Tatbestand ein Spezialfall eines viel allgemeineren ist, daß es für die $l$ dimensionale Hyperfläche des $n$ dimensionalen Raumes konstanter Krümmung ein Formensystem gibt, das diese Hyperfläche bis auf Kongruenz und Spiegelung bestimmt, und zwar für jedes $l$ zwischen 1 und $n-1$.

Der Klarheit der Darstellung wegen behandeln wir dieses Problem zuerst für den euklidischen $R_n$; die Räume konstanter Krümmung sind dann in einigen Worten erledigt.

Wir beziehen den euklidischen $R_n$ auf rechtwinklige kartesische Koordinaten, in welchen der Maßtensor $g_{ik} = \delta_{ik}$ ist. Die $F_l$ setzen wir in Parameterdarstellung

$$x_\iota = x_\iota(y_1, \ldots, y_l) \tag{1}$$

voraus. Die Funktionen $x_i(y_1, \ldots, y_l)$ seien bis zu einer gewissen Ordnung $m$ stetig differenzierbar, jedenfalls so weit, als wir im folgenden davon Gebrauch machen werden. Der Rang der Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \right\| \tag{2}$$

ist genau gleich $l$, da sonst die $F_l$ (1) bereits durch weniger als $l$ Parameter darstellbar, also keine $F_l$ wäre. Singuläre Punkte der $F_l$, in denen der Rang der Matrix kleiner als $l$ ist, können natürlich auftreten, sie werden aber im folgenden nicht betrachtet.

Der Vektorraum, der durch die Vektoren

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha} \qquad (\alpha = 1, \ldots, l)$$

aufgespannt wird, ist demnach in jedem Punkte der $F_l$ $l$ dimensional und heißt *Tangentenraum* des betreffenden Punktes. Wir bezeichnen ihn mit $J_1$.

Neben dem Vektorraum $J_1$ sind die *Schmiegräume* (genauer Schmieg-Vektorräume) von Bedeutung. Mit $J_{12\ldots h}$ bezeichnen wir den $h$ten Schmiegraum, der von allen Ableitungen der $x_i$ nach den $y_\alpha$ bis zur $h$ten Ordnung einschließlich aufgespannt wird.[1])

Es ist also der Vektorraum $J_{12}$ aufgespannt durch die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$, der Vektorraum $J_{123}$ aufgespannt durch die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_\alpha}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$, $\frac{\partial^3 x_i}{\partial y_\alpha \partial y_\beta \partial y_\gamma}$ usw.

In völliger Analogie zu den Kurven definieren wir weiter die *Normalenräume* in einem Punkte $P$ der $F_l$, die wir als $J_k$-Räume ($k = 2, 3, \ldots$) bezeichnen; und zwar ist der erste Normalenraum $J_2$ der größte Untervektorraum des $J_{12}$, der auf dem $J_1$-Raum senkrecht steht, der zweite Normalenraum $J_3$ ist der größte Untervektorraum des $J_{123}$, der auf dem $J_{12}$ senkrecht steht usw. Man beachte, daß der $J_{12\ldots h-1h}$ stets den $J_{12\ldots h-1}$ enthält.

Bezeichnen wir mit

(3)
$$\underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \partial y_{\alpha_2} \cdots \partial y_{\alpha_h}}}$$

die Projektion des Vektors $\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \partial y_{\alpha_2} \cdots \partial y_{\alpha_h}}$ in den $J_h$-Raum, so ist

$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \cdots \partial y_{\alpha_h}} - \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \cdots \partial y_{\alpha_h}}}$$

ein Vektor, der auf dem $J_h$-Raum senkrecht steht (Eigenschaft der Projektion), und da dieser Vektor ganz im $J_{12\ldots h}$-Vektorraum liegt, so muß er ein Vektor des $J_{12\ldots h-1}$ sein. Also gilt

(4)
$$\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \cdots \partial y_{\alpha_h}} = \underline{\frac{\partial^h x_i}{\partial y_{\alpha_1} \cdots \partial y_{\alpha_h}}} + \text{Vektor des } J_{12\ldots h-1}.$$

Aus dieser Relation wieder folgt, daß der $J_h$-Raum gerade durch die Vektoren (3) aufgespannt wird. Solcher Vektoren (3) gibt es höchstens $\binom{l+h-1}{h}$ unabhängige; für die Dimension $l_h$ des $J_h$-Raumes gilt demnach

(5)
$$l_h \leqq \binom{l+h-1}{h}.$$

Gilt das Ungleichheitszeichen, so nennen wir den $J_h$-Raum ausgeartet.

Wir zeigen jetzt, *daß die Schmiegräume $J_1$, $J_{12}$, $J_{123}$, ... von der Wahl der Parameter $y_1, \ldots, y_l$ nicht abhängen; das gleiche gilt dann für die $J_k$-Räume.* Ist nämlich

1) Im euklidischen, auf kartesische Koordinaten bezogenen $R_n$ sind die Ableitungen von Vektoren stets wieder Vektoren.

(6) $$\bar{y}_p = \bar{y}_p(y_1, \ldots, y_l), \quad y_p = y_p(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l)$$

eine Parametertransformation, in welcher die Funktionen $\bar{y}_p(y_1, \ldots, y_l)$, $y_p(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_l)$ genügend oft $(m > 1)$ stetig differenzierbar sind, so folgt aus (6)

(7) $$\frac{\partial \bar{y}_p}{\partial y_q}\frac{\partial y_q}{\partial \bar{y}_t} = \delta_{pt},$$

demnach (I, § 1)

(8) $$\left|\frac{\partial \bar{y}_p}{\partial y_q}\right| \neq 0, \quad \left|\frac{\partial y_p}{\partial \bar{y}_q}\right| \neq 0.$$

Aus

(9) $$\begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial y_p} = \dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_q}\dfrac{\partial \bar{y}_q}{\partial y_p} \\[2ex] \dfrac{\partial x_i}{\partial \bar{y}_p} = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_q}\dfrac{\partial y_q}{\partial \bar{y}_p} \end{cases}$$

erkennen wir die Invarianz des Tangentenraumes $J_1$ bei Parameteränderung und durch fortgesetzte Differentiation des Systems die Invarianz aller Schmiegräume.

## § 2. Ein normiertes, die $J_k$-Räume aufspannendes Bein und die adjungierten Formen der $F_l$.

Die $J_k$-Räume eines Punktes der $F_l$ liegen jedenfalls alle in einem der Schmiegräume $J_{12\ldots h}$. Verschwindet der $J_r$-Raum, d. h. ist

$$J_{12\ldots r-1} \equiv J_{12\ldots r-1\,r},$$

so gilt $J_{12\ldots r-1} \equiv J_{12\ldots r} \equiv J_{12\ldots r+1} \equiv \cdots$, d. h. es verschwinden dann auch die weiteren Normalenräume $J_{r+1}, J_{r+2}, \ldots$. Es liegen dann alle $J_k$-Räume im $r-1$ten Schmiegraum $J_{12\ldots r-1}$. Hat dieser Vektorraum die Dimension $\nu \leq n$, so konstruieren wir ein normiertes $\nu$-Bein nach den folgenden zwei Vorschriften: Ist ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ dieses normierte Bein, so soll gelten:

1. Jeder Vektor ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ist in einem der $J_k$-Räume enthalten.

2. Liegt ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ im $J_p({}_{(\alpha)}\lambda_i \prec J_p)$ und ${}_{(\beta)}\lambda_i$ im $J_q({}_{(\beta)}\lambda_i \prec J_q)$, so folgt aus $\alpha < \beta$, daß $p \leq q$ ist.

Kurz gesagt: es spannen die $l$ ersten Vektoren des $\nu$-Beins den $J_1$-Raum auf, die $l_2$ nächsten den $J_2$-Raum, die $l_3$ nächsten den $J_3$-Raum usw., wobei $l_k$ die Dimension des $J_k$-Raumes bedeutet. Je zwei diesen Vorschriften genügende normierte Beine heißen *äquivalent*. Liegt ${}_{(\alpha)}\lambda_i$, d. h. der $\alpha$te Vektor eines solchen Beines im $J_p$-Vektorraume, was wir durch

$$\alpha \prec J_p$$

ausdrücken, so nennen wir $\alpha$ *einen Index des $J_p$-Raumes.* Zwei Vektorräume $J_p$, $J_{p+1}$ heißen *benachbart,* dagegen $J_p$, $J_{p+2}$ *überbenachbart.*

Es sei jetzt $\lambda_i$ ein von der Wahl der Parameter $y_1, \ldots, y_l$ unabhängiger Vektor eines Punktes $P$ der $F_l$, z. B.

(1) $$\lambda_i = \frac{d^k x_i}{d s^k},$$

der $k$te Differentialquotient nach der Bogenlänge einer $P$ enthaltenden Flächenkurve $x_i = x_i(s)$. Die Projektion des Vektors $\lambda_i$ in jeden der $J_h$-Räume der $F_l$ in $P$ ist dann ebenfalls von der Parameterwahl unabhängig. Mit

(1′) $$\underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}}$$

bezeichnen wir die Projektion des Vektors (1) in den $J_k$-Raum. Aus der mittels Induktion zu beweisenden Relation

$$\frac{d^k x_i}{d s^k} = \frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}} \frac{d y_{r_1}}{d s} \cdots \frac{d y_{r_k}}{d s} + \sum_{h<k} (\cdots) \frac{\partial^h x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_h}}$$

folgt für den Projektionsvektor (1′)

(2) $$\underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}} = \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \partial y_{r_2} \cdots \partial y_{r_k}}} \frac{d y_{r_1}}{d s} \frac{d y_{r_2}}{d s} \cdots \frac{d y_{r_k}}{d s}.$$

Mit der linken Seite von (2) ist auch die rechte vom Parametersystem unabhängig und stellt somit für jedes $i$ einen symmetrischen kovarianten Flächentensor (bezüglich der Transformationen der Parameter $y_\alpha$) $k$ter Stufe dar mit den Komponenten[1])

(2′) $$\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}}.$$

Ist ${}_{(\alpha)}\lambda_i$, $\alpha \prec J_k$, das den $J_k$-Raum aufspannende normierte $l_k$-Bein, so gilt die Darstellung

(3) $$\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}} = {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\alpha)}A_{r_1 \ldots r_k},$$

---

1) Ist $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ in allen Indizes symmetrisch und

$$A = a_{i_1 i_2 \ldots i_r} \varrho^{i_1} \varrho^{i_2} \ldots \varrho^{i_r}$$

für beliebige Vektoren $x_i$, $\varrho^i$ invariant, so ist $a_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ ein Tensor im Punkt $x_i$. Setzen wir nämlich mit willkürlichen Skalaren $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$

$$\varrho^i = \alpha_1 \underset{1}{\sigma^i} + \alpha_2 \underset{2}{\sigma^i} + \cdots + \alpha_r \underset{r}{\sigma^i},$$

wo $x_i$, $\underset{t}{\sigma^i}$ ($t = 1, \ldots, r$) beliebige Vektoren im Punkt $x_i$ sind, so stellt $A$ eine Invariante dar, die eine Form $r$ten Grades in den willkürlichen Größen $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ ist. Somit müssen alle Koeffizienten dieser Form selbst Invarianten sein; der Koeffizient von $\alpha_1 \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ist aber

$$r!\, a_{i_1 i_2 \ldots i_r} \underset{1}{\sigma^{i_1}} \underset{2}{\sigma^{i_2}} \ldots \underset{r}{\sigma^{i_r}}.$$

über $\alpha \prec J_k$ summiert. Setzt man ${}_{(\alpha)}A_{r_1 \ldots r_k} = 0$, wenn $\alpha$ kein Index des $J_k$ ist, so gilt (3) für $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Aus (3) folgt dann für die Darstellungskoeffizienten durch Überschiebung mit ${}_{(\beta)}\lambda_i$

$$(4) \qquad {}_{(\alpha)}A_{r_1 \ldots r_k} = {}_{(\alpha)}\lambda_i \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}} \qquad (\alpha = 1, \ldots, n)$$

Die $l_k$ Formen

$$(5) \qquad {}_{(\alpha)}K = {}_{(\alpha)}\lambda_i \underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}} = {}_{(\alpha)}A_{r_1 \ldots r_k} \frac{d y_{r_1}}{d s} \cdots \frac{d y_{r_k}}{d s} \qquad (\alpha \prec J_k),$$

die ebenfalls Invarianten gegenüber Parametertransformationen sind, geben uns $l_k$ symmetrische kovariante Flächentensoren im Punkte $P$ der $F_l$. Ihre Komponenten

$$(5') \qquad {}_{(\alpha)}A_{r_1 \ldots r_k} \qquad (\alpha \prec J_k)$$

*sind linear unabhängig.* Aus (3) und (4) folgt ja, daß die Matrizen

$$\left\| \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}} \right\| \quad \text{und} \quad \left\| {}_{(\alpha)}A_{r_1 \ldots r_k} \right\|$$

den gleichen Rang besitzen, der also gleich $l_k$ sein muß; daher sind die Tensoren (5′) linear unabhängig. Die so definierten $\nu$ Formen ${}_{(\alpha)}K$ heißen *die dem normierten $\nu$-Bein adjungierten Formen der $F_l$.*

Sie sind also nicht der $F_l$ selbst zugeordnet, sondern der $F_l$ und einem die $J_k$-Räume aufspannenden $\nu$-Beine. Den verschiedenen äquivalenten $\nu$-Beinen sind verschiedene solche Formensysteme zugeordnet, die zueinander in höchst einfacher Beziehung stehen und die, wie die entsprechenden $\nu$-Beine, *äquivalente Formensysteme* heißen mögen. Von diesen Formensystemen ${}_{(\alpha)}K$ gelangt man dann, indem man die Summen

$$(6) \qquad I_k = \sum_{\alpha \prec J_k} ({}_{(\alpha)}K)^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

für jeden $J_k$ bildet, wie wir später zeigen, zu dem *der $F_l$ allein zugeordneten System der „Formenquadrate“* (6).

Wir geben nun eine geometrische Interpretation der $J_k$-Räume und der Formen ${}_{(\alpha)}K$. Ist $P$ ein Punkt der $F_l$ und

$$(7) \qquad x_i = x_i(s)$$

irgendeine $P$ enthaltende Kurve $C$ der $F_l$, so gilt

$$(2) \qquad \underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}} = \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}} \frac{d y_{r_1}}{d s} \cdots \frac{d y_{r_k}}{d s}.$$

Die sämtlichen Projektionen $\underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}}$ liegen (und zwar definitionsgemäß) im

$J_k$-Raume in $P$; wir zeigen zuerst, *daß es im $J_k$ keinen Unterraum gibt, der diese Projektionsvektoren bereits enthält.*

Gäbe es einen solchen echten (vom $J_k$ verschiedenen) Unterraum des $J_k$, so sei $\eta_i$ ein Vektor des $J_k$ normal auf diesen. Der Vektor $\eta_i$ stünde dann auf allen Vektoren (2) senkrecht, d. h. für jede Richtung $\frac{d y_r}{d s}$ wäre

$$\eta_i \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}} \frac{d y_{r_1}}{d s} \cdots \frac{d y_{r_k}}{d s} = 0.$$

Der symmetrische Tensor $k$ ter Stufe

$$t_{r_1 \ldots r_k} = \eta_i \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1} \cdots \partial y_{r_k}}}$$

müßte verschwinden, also wäre gegen Annahme $\eta_i$ normal zum $J_k$-Raum.

Sei jetzt $P$ ein Punkt der $F_l$ und $C$ eine Kurve $x_i = x_i(s)$ der $F_l$ durch $P$. Existiert der $J_k$-Vektorraum in $P$, so ist nach (2) $\underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}}$ im allgemeinen von Null verschieden.[1]) Für die $k-1$ te Normale ${}_{(k)}\xi_i$ von $C$ in $P$ gilt nach (IV, 3, 31)

(8)
$$\frac{{}_{(k)}\xi_i}{\varrho_1 \cdots \varrho_{k-1}} = \frac{d^k x_i}{d s^k} + \sum_{h<k} X_h \frac{d^h x_i}{d s^h}.$$

Bezeichnen wir mit $\underline{{}_{(k)}\xi_i}$ die Projektion von ${}_{(k)}\xi_i$ in den $J_k$, so folgt aus (8)

(9)
$$\frac{1}{\varrho_1 \cdots \varrho_{k-1}} \underline{{}_{(k)}\xi_i} = \underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}}.$$

(Die Projektion der Summe ist gleich der Summe der Projektionen.) Das Produkt $\frac{1}{\varrho_1 \cdots \varrho_{k-1}}$ ist (als Produkt von Normierungsfaktoren) endlich und im allgemeinen nicht Null; wo es verschwindet, ist $\underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}} = 0$. Die Vektorräume

$$\left\{\underline{{}_{(k)}\xi_i}\right\} \quad \text{und} \quad \left\{\underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}}\right\},$$

für alle Kurven der $F_l$ durch $P$ gebildet, sind nach (9) identisch. Also ist der $J_k$ der kleinste Vektorraum, der alle $\underline{{}_{(k)}\xi_i}$ (aller Kurven der $F_l$ in $P$) enthält.

*Es ist somit der $J_1$ der kleinste Vektorraum in $P$, der die Tangenten aller Flächenkurven in $P$ enthält, der $J_{12}$ der kleinste Vektorraum in $P$, der die Tangenten und ersten Normalen aller dieser Kurven in $P$ enthält, usw.*[2])

---

1) Nur für gewisse Ausnahmerichtungen spezieller $F_l$ kann $\underline{\frac{d^k x_i}{d s^k}} = 0$ sein.

2) Ohne Einschränkung gilt, daß der $J_{12\ldots k}$-Raum durch die Vektoren ${}_{(1)}\xi_i$, $\frac{{}_{(2)}\xi_i}{\varrho_1}, \ldots, \frac{{}_{(k)}\xi_i}{\varrho_1 \cdots \varrho_{k-1}}$ aller Kurven durch $P$ aufgespannt wird.

Sei jetzt ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ein Vektor des die $J_k$-Räume aufspannenden $\nu$-Beines, so folgt aus (8) für $\alpha \prec J_k$

$$ {}_{(\alpha)}\lambda_{i\,(k)}\xi_i = \varrho_1 \cdots \varrho_{k-1\,(\alpha)}\lambda_i \frac{d^k x_i}{d s^k} = \varrho_1 \cdots \varrho_{k-1\,(\alpha)}K, $$

oder

$$ (10) \qquad {}_{(\alpha)}K = \frac{{}_{(\alpha)}\lambda_{i\,(k)}\xi_i}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{k-1}} \qquad (\alpha \prec J_k). $$

Diese Darstellung, beziehungsweise die tensorielle

$$ (10') \qquad {}_{(\alpha)}K = \frac{{}_{(\alpha)}\lambda_{i\,(k)}\xi^i}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{k-1}} \qquad (\alpha \prec J_k) $$

der Formen unserer $F_l$ bleibt auch dann richtig, wenn wir den euklidischen $R_n$ auf beliebige (zulässige) Koordinaten beziehen.

Für $l=1$, also im Falle der Kurven ist der $J_k$-Raum eindimensional und ${}_{(k)}\lambda_i = {}_{(k)}\xi_i$. Aus (10) folgt

$$ (11) \qquad {}_{(k)}K = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2 \cdots \varrho_{k-1}}, $$

der höchst einfache Zusammenhang der hier verwendeten Formen mit den Krümmungen der Kurve.

## § 3. Die Ableitungsgleichungen.

Sie entsprechen im Falle der Kurven (Flächen) den FRENETschen (bzw. WEINGARTENschen und GAUSSschen) Formeln der elementaren Differentialgeometrie.

Ist ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ ein die $J_k$-Räume aufspannendes $\nu$-Bein, so sind die Ableitungen $\frac{\partial\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p}$ Vektoren, die durch das $\nu$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ selbst linear darstellbar sind:

$$ (1) \qquad \frac{\partial\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p} = {}_{(\alpha\beta)}C_{p\,(\beta)}\lambda_i, \quad {}_{(\alpha\beta)}C_p = \frac{\partial\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p}\,{}_{(\beta)}\lambda_i \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, \nu). $$

Man bestätigt das bei einigem Überlegen, im übrigen folgt es auch aus den Ausführungen dieses Paragraphen. Da $d\,{}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha\beta)}C_p\, d y_{p\,(\beta)}\lambda_i$ von der Wahl der Parameter $y_1, \ldots, y_l$ nicht abhängt, so ist ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ für jede der Kombinationen $\alpha, \beta$ ein kovarianter Vektor in bezug auf Parametertransformationen.

Wir stellen uns die Aufgabe, diese Vektoren durch die im vorhergehenden Paragraphen definierten symmetrischen Tensoren (2, 4)

$$ (2) \qquad {}_{(\alpha)}A_p, \quad {}_{(\alpha)}A_{p_1 p_2}, \quad {}_{(\alpha)}A_{p_1 p_2 p_3}, \ldots $$

zu berechnen. Es gilt hier das fundamentale Resultat, daß diese Berechnung, die allerdings sehr umständlich ist, *in eindeutiger Weise* zum Ziele führt.

Außer den aus (1) zu entnehmenden Integrabilitätsbedingungen sind bei der Berechnung noch gewisse Relationen zwischen den ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ herzuleiten, die aus der Art der Konstruktion des die $J_k$-Räume aufspannenden normierten $\nu$-Beins gefolgert werden.

Aus der Normierungsvorschrift ${}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(\beta)}\lambda_i = \delta_{\alpha\beta}$ erhalten wir durch Differentiation nach $y_p$ wegen (1)

$$0 = \frac{\partial\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p}\,{}_{(\beta)}\lambda_i + {}_{(\alpha)}\lambda_i\,\frac{\partial\,{}_{(\beta)}\lambda_i}{\partial y_p} = {}_{(\alpha\gamma)}C_p\,{}_{(\gamma)}\lambda_i\,{}_{(\beta)}\lambda_i + {}_{(\beta\gamma)}C_p\,{}_{(\gamma)}\lambda_i\,{}_{(\alpha)}\lambda_i,$$

also

(3) $$ {}_{(\alpha\beta)}C_p = -\,{}_{(\beta\alpha)}C_p.$$

Während (3) für jedes in den Punkten der $F_l$ definierte normierte $\nu$-Bein gilt, kommt die jetzt abzuleitende Relation nur den in § 2 definierten (die $J_k$-Räume aufspannenden) $\nu$-Beinen zu. Ist ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ein solches $\nu$-Bein und ist $\alpha$ ein Index des $J_k$. also ${}_{(\alpha)}\lambda_i \prec J_k$, so ist ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ nach Konstruktion als Vektor des $J_{12\ldots k}$ durch die Ableitungen der $x_1, \ldots, x_n$ nach den $y_1, \ldots, y_l$ bis zur $k$ten Ordnung einschließlich (letztere wirklich vertreten) linear darstellbar, $\frac{\partial\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p}$ somit durch die Ableitungen bis zur $k+1$ten Ordnung, wobei letztere in die Darstellung wirklich eintreten. Also ist $\frac{\partial\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p}$ ein Vektor des $J_{12\ldots k+1}$. Ist dann ${}_{(\beta)}\lambda_i$ ein zweiter Vektor des die $J_h$-Räume aufspannenden $\nu$-Beins und $\beta \prec J_{k+r}$, $r > 1$, so ist, da der $J_{k+r}$ auf dem $J_{12\ldots k+r-1} \succ J_{12\ldots k+1}$ normal steht,

$$\frac{\partial\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial y_p}\,{}_{(\beta)}\lambda_i = 0$$

d. h. es gilt

(4) $$ {}_{(\alpha\beta)}C_p = 0 \qquad (\alpha \prec J_k,\ \beta \prec J_{k+r},\ r>1).$$

Daraus und wegen (3) folgt allgemeiner

(5) $$ {}_{(\alpha\beta)}C_p = 0 \qquad (\alpha \prec J_k,\ \beta \prec J_{k\pm r},\ r>1).$$

Dies drücken wir in dem Satze aus: *Nur für Indizes $\alpha, \beta$ gleicher oder benachbarter* (§ 2) *$J_k$-Räume sind die ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ von Null verschieden.*

Neben den Relationen (3) und (5) leiten wir jetzt eine Relation ab, die die Tensoren (2) mit den ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ verknüpft. Durch Differentiation von (2, 3) nach $y_{r_{k+1}}$ erhalten wir

(6) $$\frac{\partial}{\partial y_{r_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_k}}\right) = \left[\frac{\partial\,{}_{(\alpha)}A_{r_1\ldots r_k}}{\partial y_{r_{k+1}}} + {}_{(\gamma\alpha)}C_{r_{k+1}}\,{}_{(\gamma)}A_{r_1\ldots r_k}\right]{}_{(\alpha)}\lambda_i,$$

in welcher Relation die Koeffizienten von ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ rechter Hand identisch verschwinden, wenn $\alpha$ nicht ein Index des $J_{k-1}$, $J_k$ oder $J_{k+1}$ ist. Das folgt aus

${}_{(\alpha)}A_{r_1\ldots r_k} = 0$ für $\alpha \prec J_h$, $h \neq k$ und dann weiter aus (5). Aus (1, 4) für $h = k$ erhalten wir durch Differentiation nach $y_{r_{k+1}}$

$$\frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{r_1}\partial y_{r_2}\cdots\partial y_{r_k}\partial y_{r_{k+1}}} = \frac{\partial}{\partial y_{r_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{r_1}\partial y_{r_2}\cdots\partial y_{r_k}}\right) + \text{Vektor des } J_{12\ldots k}. \tag{7}$$

Die Projektion des Vektors auf der linken Seite der Relation (6) in den $J_{k+1}$-Raum ist nach (6) durch ${}_{(\gamma\alpha)}C_{r_{k+1}}\,{}_{(\gamma)}A_{r_1\ldots r_k}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha \prec J_{k+1})$ und nach (7) durch

$$\frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{r_1}\cdots\partial y_{r_k}\partial y_{r_{k+1}}} = {}_{(\alpha)}A_{r_1\ldots r_k r_{k+1}}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i \qquad (\alpha \prec J_{k+1})$$

gegeben. Der Vergleich ergibt wegen der linearen Unabhängigkeit der ${}_{(\alpha)}\lambda_i$

$$ {}_{(\alpha)}A_{r_1\ldots r_k r_{k+1}} = {}_{(\gamma\alpha)}C_{r_{k+1}}\,{}_{(\gamma)}A_{r_1\ldots r_k} \qquad (\alpha \prec J_{k+1}), \tag{8}$$

in welcher Relation $\gamma$ die Indizes des $J_k$ durchläuft.

## § 4. Berechnung der ${}_{(\alpha\beta)}C_p$.

Nur für Indizes $\alpha, \beta$ desselben oder benachbarter $J_k$-Räume sind die ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ von Null verschieden. Die ${}_{(\alpha\beta)}C_p$, für die $\alpha$ und $\beta$ benachbarten $J_k$ angehören, berechnen wir aus dem zuletzt abgeleiteten Relationensystem (3, 8). Da die $l_k$ Formen ${}_{(\gamma)}A_{r_1\ldots r_k}$ $(\gamma \prec J_k)$ linear unabhängig sind, so hat die Matrix

$$\| {}_{(\gamma)}A_{r_1\ldots r_k} \|$$

den Rang $l_k$, sie enthält also eine nicht verschwindende Determinante von der Ordnung $l_k$. Somit genügt das Teilsystem von (3, 8), in das die Elemente ${}_{(\gamma)}A_{r_1\ldots r_k}$ dieser Determinante eintreten, zur eindeutigen Berechnung der ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ $(\alpha \prec J_k,\ \beta \prec J_{k+1})$.

Die restlichen Gleichungen (3, 8), die nach Substitution der berechneten ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ für die gegebene $F_l$ erfüllt sind, stellen für ein gegebenes Formensystem Bedingungsgleichungen dar, wenn eine $F_l$ mit diesem Formensystem existieren soll. Wir wollen diesen Bedingungsgleichungen einen Namen geben, und zwar mögen sie, da sie nur die Tensoren (3, 2) und nicht deren Ableitungen enthalten, *die algebraischen Bedingungsgleichungen* des gegebenen Formensystems heißen. Ist der $J_k$-Raum nicht ausgeartet, dann (und nur dann) benötigt man zur Berechnung der ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ das ganze System (3, 8), und die entsprechenden algebraischen Bedingungsgleichungen fallen weg.

Wir notieren das bisher gewonnene Ergebnis: *Die* ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ *sind für* $\alpha \prec J_k$, $\beta \prec J_{k+1}$ *aus den Tensoren* ${}_{(\gamma)}A_{r_1\ldots r_k}$, $\gamma \prec J_k$, $J_{k+1}$ *eindeutig berechenbar.*

Es verbleibt uns die bei weitem kompliziertere Berechnung der ${}_{(\alpha\,\beta)}C_p$ für $\alpha, \beta \prec J_k$. Wir berechnen sie unter Benutzung der Integrabilitätsbedingungen des Systemes

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} \text{(a)} & d\,{}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha\,\beta)}C_p\,{}_{(\beta)}\lambda_i\,dy_p \\ \text{(b)} & dx_i = {}_{(\alpha)}A_p\,{}_{(\alpha)}\lambda_i\,dy_p. \end{cases}$$

Wir beginnen mit den aus (I b) folgenden Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_p} = 0,$$

die ausführlich geschrieben

$$\text{(1)}\qquad {}_{(\alpha)}\lambda_i\left(\frac{\partial_{(\alpha)}A_p}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha)}A_q}{\partial y_p} + {}_{(\beta)}A_p\,{}_{(\beta\,\alpha)}C_q - {}_{(\beta)}A_q\,{}_{(\beta\,\alpha)}C_p\right) = 0$$

lauten, woraus (immer wegen der linearen Unabhängigkeit der ${}_{(\alpha)}\lambda_i$)

$$\text{(2)}\qquad \frac{\partial_{(\alpha)}A_p}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha)}A_q}{\partial y_p} = {}_{(\beta)}A_q\,{}_{(\beta\,\alpha)}C_p - {}_{(\beta)}A_p\,{}_{(\beta\,\alpha)}C_q$$

folgt. Das System (2) ist identisch befriedigt, wenn $\alpha \prec J_h$, $h > 2$ ist. Für $\alpha \prec J_2$ lautet es

$$\text{(3)}\qquad {}_{(\beta)}A_p\,{}_{(\beta\,\alpha)}C_q = {}_{(\beta)}A_q\,{}_{(\beta\,\alpha)}C_p \qquad (\alpha \prec J_2).$$

Nach (3, 8) ist aber die linke Seite von (3) gleich ${}_{(\alpha)}A_{pq}$ und die rechte gleich ${}_{(\alpha)}A_{qp}$; sobald (3, 8) erfüllt ist, ist wegen ${}_{(\alpha)}A_{pq} = {}_{(\alpha)}A_{qp}$ auch (3) erfüllt. Es verbleibt somit nur mehr der Fall $\alpha \prec J_1$.

Setzen wir ohne Rücksichtnahme auf den tensoriellen Charakter

$$\text{(4)}\qquad (\alpha p q) = \frac{\partial_{(\alpha)}A_p}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha)}A_q}{\partial y_p},$$

so folgt aus (2)

$$\text{(5)}\qquad (\alpha\,p\,q)\,{}_{(\alpha)}A_r - (\alpha\,q\,r)\,{}_{(\alpha)}A_p + (\alpha\,r\,p)\,{}_{(\alpha)}A_q = 2\,{}_{(\beta\,\alpha)}C_p\,{}_{(\beta)}A_q\,{}_{(\alpha)}A_r.$$

Da die Determinante $|{}_{(\alpha)}A_p| \neq 0$ ist, können wir das dem $l$-Bein ${}_{(\alpha)}A_p$ adjungierte $l$-Bein ${}_{(\alpha)}A^q$ bilden, so daß also

$$\text{(6)}\qquad {}_{(\alpha)}A_p\,{}_{(\alpha)}A^q = \delta_p^q \quad \text{und} \quad {}_{(\alpha)}A_p\,{}_{(\beta)}A^p = \delta_{\alpha\beta}$$

gilt. Durch Überschiebung von (5) mit ${}_{(\gamma)}A^q\,{}_{(\varepsilon)}A^r$ folgt

$$\text{(6')}\qquad 2\,{}_{(\gamma\,\varepsilon)}C_p = [(\alpha p q)\,{}_{(\alpha)}A_r - (\alpha q r)\,{}_{(\alpha)}A_p + (\alpha r p)\,{}_{(\alpha)}A_q]\,{}_{(\gamma)}A^q\,{}_{(\varepsilon)}A^r,$$

wo $\gamma$ und $\varepsilon$ Indizes des $J_1$-Raumes sind. Man beachte, daß

$${}_{(\gamma\,\varepsilon)}C_p = -\,{}_{(\varepsilon\,\gamma)}C_p,$$

wie notwendig zu erwarten war, gilt.

Wir notieren: *Aus den Tensoren erster Stufe ${}_{(\alpha)}A_p$ und deren Ableitungen lassen sich die ${}_{(\alpha\,\beta)}C_p$ für $\alpha, \beta \prec J_1$ eindeutig berechnen.*

Da es für $\alpha \prec J_1$ gerade $l\binom{l}{2}$ Gleichungen (2) gibt und wir aus ihnen die $l\binom{l}{2}$ Vektoren ${}_{(\gamma\varepsilon)}C_p$ ($\gamma, \varepsilon \prec J_1$) berechneten, so verbleiben keine Bedingungsgleichungen aus dem System (2).

Das System (2) ist nun erschöpft; die weiteren ${}_{(\alpha\beta)}C_p$, wo $\alpha$ und $\beta$ Indizes desselben $J_k$ sind, berechnen wir unter Benutzung der Integrabilitätsbedingungen

$$(7)\qquad \left[\frac{\partial_{(\alpha\beta)}C_p}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha\beta)}C_q}{\partial y_p} + {}_{(\alpha\gamma)}C_{p\,(\gamma\beta)}C_q - {}_{(\alpha\gamma)}C_{q\,(\gamma\beta)}C_p\right]{}_{(\beta)}\lambda_i = 0$$

des Systems (I a), welche infolge der Unabhängigkeit der ${}_{(\beta)}\lambda_i$ mit dem System

$$(8)\qquad {}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = \frac{\partial_{(\alpha\beta)}C_p}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha\beta)}C_q}{\partial y_p} + {}_{(\alpha\gamma)}C_{p\,(\gamma\beta)}C_q - {}_{(\alpha\gamma)}C_{q\,(\gamma\beta)}C_p = 0$$

äquivalent sind. Die Berechnung ergibt, wie sogleich gezeigt wird, gewisse Bedingungsgleichungen, die ein Formensystem zu erfüllen hat, wenn es das System der Formen einer $F_l$ des $R_n$ sein soll. Da ${}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = -{}_{(\beta\alpha)}X_{pq}$ ist, so können wir uns die Integrabilitätsbedingungen (8) so geordnet denken, daß *aus* $\alpha \prec J_f$, $\beta \prec J_g$ *stets* $f \leqq g$ *folgt.*

*Nun setzen wir voraus, wir hätten für* $h \leqq k$ *die* ${}_{(\varepsilon\gamma)}C_p$ ($\varepsilon, \gamma \prec J_h$) *berechnet, und zwar mittels der Tensoren* ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_t}$ *bis zur* $h$*ten Stufe und deren Ableitungen. Für* $k = 1$ *trifft dies zu. Bei dieser Berechnung sei das Teilsystem der geordneten Integrabilitätsbedingungen* ${}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0$ ($\alpha \prec J_j$, $j < k$) *bereits aufgebraucht worden, was für* $k = 1$ *ebenfalls zutrifft, da ein solches Teilsystem dann nicht existiert.*

*Wir zeigen dann, daß wir bei Verwendung von*

$${}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0, \quad \alpha \prec J_k$$

*die* ${}_{(\varepsilon\gamma)}C_p$ *für* $\varepsilon, \gamma \prec J_{k+1}$ *berechnen können, und zwar ausgedrückt in den Tensoren* ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_t}$ *bis zur* $k+1$*ten Stufe und deren Ableitungen.*

Das System der ${}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0$ ($\alpha \prec J_k$) zerfällt seinerseits in drei Teilsysteme, je nachdem $\beta \prec J_k$, $\beta \prec J_{k+1}$ oder $\beta \prec J_{k+2}$ ist. Für $\beta \prec J_{k+j}$, $j > 2$ verschwindet es identisch. Wir spalten ${}_{(\alpha\beta)}X_{pq}$ in zwei Summanden wie folgt:

$$(9)\qquad {}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq} + {}_{(\alpha\beta)}Z^{(k)}_{pq},$$

*wo*

$$(10)\qquad {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq} = \frac{\partial_{(\alpha\beta)}C_p}{\partial y_q} - \frac{\partial_{(\alpha\beta)}C_q}{\partial y_p} + \sum_{\gamma \prec J_\varrho} {}_{(\alpha\gamma)}C_{p\,(\gamma\beta)}C_q - \sum_{\gamma \prec J_\varrho} {}_{(\alpha\gamma)}C_{q\,(\gamma\beta)}C_p$$
$$(\varrho = k-1,\ k)$$

*nach Voraussetzung bereits bekannt ist,* und allein

(11) $$_{(\alpha\beta)}Z^{(k)}_{pq} = \sum_{\gamma \prec J_{k+1}} {}_{(\alpha\gamma)}C_{p\,(\gamma\beta)}C_q - \sum_{\gamma \prec J_{k+1}} {}_{(\alpha\gamma)}C_{q\,(\gamma\beta)}C_p$$

die zu berechnenden $_{(\varepsilon\gamma)}C_p$ $(\alpha, \gamma \prec J_{k+1})$ enthält. Das System $_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0$, $\alpha \prec J_k$ schreiben wir demnach in der Form

(12) $$- {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq} = {}_{(\alpha\beta)}Z^{(k)}_{pq}$$

an. Da der Rang der Matrix

(13) $$\| {}_{(\alpha)}A_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} \|$$

der $l_k$ Tensoren $k$ter Stufe gleich $l_k$ ist, so ist $_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0$ $(\alpha \prec J_k)$ mit $_{(\alpha\beta)}X_{pq\,(\alpha)}A_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_k} = 0$ identisch oder das System (12) mit

(14) $$- {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq\,(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k} = {}_{(\alpha\beta)}Z^{(k)}_{pq\,(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k}$$
$$= \sum_{\gamma \prec J_{k+1}} \left[{}_{(\alpha\gamma)}C_{p\,(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k}\right] {}_{(\gamma\beta)}C_q - \sum_{\gamma \prec J_{k+1}} \left[{}_{(\alpha\gamma)}C_{q\,(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k}\right] {}_{(\gamma\beta)}C_p.$$

Nach (3, 8) können wir (14) schreiben

(14') $$- {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq\,(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k} = {}_{(\gamma)}A_{\nu_1\ldots\nu_k p}\ {}_{(\gamma\beta)}C_q - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1\ldots\nu_k q}\ {}_{(\gamma\beta)}C_p.$$

Wir erledigen die drei Teilsysteme von (14') $\beta \prec J_k$, $\beta \prec J_{k+1}$, $\beta \prec J_{k+2}$ nacheinander.

*Erster Fall:* $\beta \prec J_k$. Das System (14') ist dann äquivalent dem Systeme

(15) $$- {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq}\ {}_{(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k}\ {}_{(\beta)}A_{\mu_1\ldots\mu_k}$$
$$= - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1\ldots\nu_k p}\ {}_{(\gamma)}A_{\mu_1\ldots\mu_k q} + {}_{(\gamma)}A_{\nu_1\ldots\nu_k q}\ {}_{(\gamma)}A_{\mu_1\ldots\mu_k p}.$$

Wir nennen den Tensor

(16) $${}_{(\gamma)}A_{\nu_1\ldots\nu_k p}\ {}_{(\gamma)}A_{\mu_1\ldots\mu_k q} - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1\ldots\nu_k q}\ {}_{(\gamma)}A_{\mu_1\ldots\mu_k p}$$

den $k$ten *Krümmungstensor der* $F_l$. Obwohl er aus den Tensoren $k+1$ter Stufe hergeleitet wurde, läßt er sich nach (15) durch die Tensoren bis zur $k$ten Stufe und deren Ableitungen darstellen. Das System (15) stellt reine Beziehungen zwischen den Formenkoeffizienten dar, die erfüllt sind, sobald diesen eine $F_l$ entspricht.

Wir nennen diese Bedingungsgleichungen *das System der Gaußschen Krümmungsrelationen unserer* $F_l$, da in der Tat für die $F_2$ des euklidischen $R_3$ (15) die bekannte Relation $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = K(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)$ darstellt, wo die $b_{ik}$ die Koeffizienten der zweiten Grundform (der Haupttensor) sind.

*Zweiter Fall:* $\beta \prec J_{k+1}$. Wir schreiben für die bereits bekannte linke Seite von (14') abkürzend

$$(\nu_1\nu_2\ldots\nu_k,\ pq)_\beta,$$

demnach statt (14′)

$$(17)\qquad (\nu_1 \dots \nu_k,\, pq)_\beta = {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k p}\; {}_{(\gamma\beta)}C_q - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k q}\; {}_{(\gamma\beta)}C_p .$$

Wir fügen hinzu

$$(\mu_1 \dots \mu_k,\, qr)_\beta = {}_{(\gamma)}A_{\mu_1 \dots \mu_k q}\; {}_{(\gamma\beta)}C_r - {}_{(\gamma)}A_{\mu_1 \dots \mu_k r}\; {}_{(\gamma\beta)}C_q ,$$
$$(\nu_1 \dots \nu_k,\, rp)_\beta = {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k r}\; {}_{(\gamma\beta)}C_p - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k p}\; {}_{(\gamma\beta)}C_r .$$

Bezeichnen wir dann für den Augenblick ${}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k p}$ mit ${}_{(\gamma)}A_{\nu p}$, so gilt

$$(18)\left\{\begin{aligned} &-(\nu_1 \dots \nu_k,\, pq)_\beta\; {}_{(\beta)}A_{\mu r} + (\mu_1 \dots \mu_k,\, qr)_\beta\; {}_{(\beta)}A_{\nu p} - (\nu_1 \dots \nu_k,\, rp)_\beta\; {}_{(\beta)}A_{\mu q} \\ &\quad = -\,{}_{(\gamma)}A_{\nu p}\; {}_{(\beta)}A_{\mu r}\; {}_{(\gamma\beta)}C_q + {}_{(\gamma)}A_{\nu q}\; {}_{(\beta)}A_{\mu r}\; {}_{(\gamma\beta)}C_p + {}_{(\gamma)}A_{\mu q}\; {}_{(\beta)}A_{\nu p}\; {}_{(\gamma\beta)}C_r \\ &\qquad -\,{}_{(\gamma)}A_{\mu r}\; {}_{(\beta)}A_{\nu p}\; {}_{(\gamma\beta)}C_q - {}_{(\gamma)}A_{\nu r}\; {}_{(\beta)}A_{\mu q}\; {}_{(\gamma\beta)}C_p + {}_{(\gamma)}A_{\nu p}\; {}_{(\beta)}A_{\mu q}\; {}_{(\gamma\beta)}C_r \\ &\quad = {}_{(\gamma\beta)}C_p \left[{}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k q}\; {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \dots \mu_k r} - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k r}\; {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \dots \mu_k q}\right]. \end{aligned}\right.$$

Zur Berechnung der ${}_{(\gamma\beta)}C_p$ $(\gamma, \beta < J_{k+1})$ formen wir das System (18) um. Die uns bekannte, aus den Tensoren des Formensystems ${}_{(\alpha)}A_{\varrho_1 \dots \varrho_t}$ bis zur $k+1$ ten Stufe aufgebaute linke Seite des Systems (18) bezeichnen wir mit

$$\left(\begin{matrix} \nu_1\, \nu_2 \dots \nu_k\, q \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k r \end{matrix}\,\middle|\, p\right)$$

und schreiben (18)

$$(19)\quad \left(\begin{matrix} \nu_1\, \nu_2 \dots \nu_k\, \nu_{k+1} \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \mu_{k+1} \end{matrix}\,\middle|\, p\right)$$
$$= {}_{(\gamma\beta)}C_p \left[{}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k \nu_{k+1}}\; {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1}} - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k \mu_{k+1}}\; {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \dots \mu_k \nu_{k+1}}\right].$$

Wir haben jetzt die Summe zu bilden

$$(20)\quad \left(\begin{matrix} \nu_1\, \nu_2 \dots \nu_k\, \nu_{k+1} \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_k \mu_{k+1} \end{matrix}\,\middle|\, p\right) + \left(\begin{matrix} \mu_{k+1} \nu_1 \dots \nu_k \\ \nu_{k+1}\, \mu_1 \dots \mu_k \end{matrix}\,\middle|\, p\right) + \left(\begin{matrix} \mu_{k+1} \mu_k \nu_1 \dots \nu_{k-1} \\ \nu_{k+1}\, \nu_k\, \mu_1 \dots \mu_{k-1} \end{matrix}\,\middle|\, p\right) + \cdots$$
$$+ \left(\begin{matrix} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_3 \nu_1\, \nu_2 \\ \nu_{k+1}\, \nu_k \dots \nu_3\, \mu_1 \mu_2 \end{matrix}\,\middle|\, p\right) + \left(\begin{matrix} \mu_{k+1} \mu_k \dots \mu_2 \nu_1 \\ \nu_{k+1}\, \nu_k \dots \nu_2\, \mu_1 \end{matrix}\,\middle|\, p\right)$$

$$\begin{aligned} &= {}_{(\gamma\beta)}C_p \left[{}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k \nu_{k+1}}\; {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1}} - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k \mu_{k+1}}\; {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \dots \mu_k \nu_{k+1}}\right] \\ &+ {}_{(\gamma\beta)}C_p \left[{}_{(\gamma)}A_{\mu_{k+1} \nu_1 \dots \nu_k}\; {}_{(\beta)}A_{\nu_{k+1} \mu_1 \dots \mu_k} - {}_{(\gamma)}A_{\mu_{k+1} \nu_1 \dots \nu_{k-1} \mu_k}\; {}_{(\beta)}A_{\nu_{k+1} \mu_1 \dots \mu_{k-1} \nu_k}\right] \\ &+ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\; + \\ &+ {}_{(\gamma\beta)}C_p \left[{}_{(\gamma)}A_{\mu_{k+1} \dots \mu_3 \nu_1 \nu_2}\; {}_{(\beta)}A_{\nu_{k+1} \dots \nu_3 \mu_1 \mu_2} - {}_{(\gamma)}A_{\mu_{k+1} \dots \mu_3 \nu_1 \mu_2}\; {}_{(\beta)}A_{\nu_{k+1} \dots \nu_3 \mu_1 \nu_2}\right] \\ &+ {}_{(\gamma\beta)}C_p \left[{}_{(\gamma)}A_{\mu_{k+1} \dots \mu_2 \nu_1}\; {}_{(\beta)}A_{\nu_{k+1} \dots \nu_2 \mu_1} - {}_{(\gamma)}A_{\mu_{k+1} \dots \mu_2 \mu_1}\; {}_{(\beta)}A_{\nu_{k+1} \dots \nu_2 \nu_1}\right] \\ &= 2\; {}_{(\gamma\beta)}C_p\; {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \dots \nu_k \nu_{k+1}}\; {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \dots \mu_k \mu_{k+1}}, \end{aligned}$$

da sich infolge der Symmetrie der Tensoren ${}_{(\varepsilon)}A_{\varrho_1 \dots \varrho_{k+1}}$ alle anderen Terme wegheben. Damit ist uns die rechte Seite von (20) algebraisch zugänglich;

aus (20) können wir jetzt, und zwar eindeutig, die ${}_{(\gamma\beta)}C_p$ $(\gamma, \beta \prec J_{k+1})$ berechnen.

In der Tat! Die Matrix

$$\| {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{k+1}} \| \qquad (\gamma \prec J_{k+1}), \tag{21}$$

hat den Rang $l_{k+1}$, und wir können aus ihr eine Determinante $l_{k+1}$ter Ordnung herausheben, die nicht Null ist. Wir fassen dann jenes Teilsystem von (20) ins Auge, in welchem die ${}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \ldots \nu_{k+1}}$, ${}_{(\beta)}A_{\mu_1 \ldots \mu_{k+1}}$ Elemente dieser Determinante sind.

Dieses Teilsystem stellt bei festem $p$ ein System von $\binom{l_{k+1}}{2}$ inhomogenen linearen Gleichungen für die $\binom{l_{k+1}}{2}$ Größen ${}_{(\gamma\beta)}C_p$ $(\gamma, \beta \prec J_{k+1})$ dar, wobei die Determinante der Koeffizienten der ${}_{(\gamma\beta)}C_p$ nicht verschwindet, da ihre Elemente ja die Minoren zweiter Ordnung unserer nicht verschwindenden Determinante sind.[1])

Wir können demnach das ausgewählte Teilsystem zur Berechnung der $\binom{l_{k+1}}{2}$ Vektoren ${}_{(\gamma\beta)}C_p$ $(\gamma, \beta \prec J_k)$ verwenden, *und zwar erhalten wir diese Vektoren allein bestimmt durch die Tensoren bis zur $k+1$ten Stufe bzw. deren Ableitungen.* Vielleicht ist es nicht unnütz, darauf hinzuweisen, daß bei dieser Berechnung nur Ableitungen der Tensoren bis zur $k$ten Stufe auftreten. Da wir für die Berechnung der ${}_{(\gamma\beta)}C_p$ $(\gamma, \beta \prec J_{k+1})$ nur ein Teilsystem von

$${}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0 \qquad (\alpha \prec J_k,\ \beta \prec J_{k+1})$$

verwendeten, so verbleiben Bedingungsgleichungen für die Formenkoeffizienten, *die wir die Codazzischen Relationen des Formensystems* nennen wollen.

Eine Bemerkung: Vertauscht man im Symbole $\left(\begin{matrix}\nu_1 \ldots \nu_{k+1} \\ \mu_1 \ldots \mu_{k+1}\end{matrix}\middle| p\right)$ die $\nu$ und $\mu$, so ändert dieses das Vorzeichen. Daraus und aus (20) folgt ${}_{(\gamma\beta)}C_p = -{}_{(\beta\gamma)}C_p$.

*Dritter Fall:* $\beta \prec J_{k+2}$. Dann ist ${}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pp} = 0$ und aus (14') wird

$$0 = {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \ldots \nu_k p}\, {}_{(\gamma\beta)}C_q - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \ldots \nu_k q}\, {}_{(\gamma\beta)}C_p, \tag{22}$$

eine Relation, die wegen (3, 8) und der Symmetrie der Tensoren $k+2$ter Stufe ${}_{(\beta)}A_{\nu_1 \ldots \nu_{k+2}}$ erfüllt ist, also keine neuen Bedingungsgleichungen liefert. *Damit ist das System* ${}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0$ $(\alpha \prec J_k)$ *erschöpft!*

War der $J_k$-Raum der letzte Normalenraum der $F_l$, d. h. existiert der $J_{k+1}$ bereits nicht mehr, so ist von den drei eben diskutierten Fällen nur der eine

1) Das Produkt der Determinante dieser Minoren mit der aus den algebraischen Komplementen dieser Minoren gebildeten Determinante ergibt ja eine Potenz der nicht verschwindenden Determinante.

$\alpha \prec J_k$, $\beta \prec J_k$ zu behandeln; es verschwindet dann der $k$te Krümmungstensor (16), und statt (15) gilt

$$(23) \qquad {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq}\,{}_{(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k}\cdot{}_{(\beta)}A_{\mu_1\ldots\mu_k} = 0 .$$

Ist wie im Falle der $F_2$ im euklidischen $R_3$ dieser letzte Normalenraum eindimensional, so gibt es wegen

$${}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq} = -\,{}_{(\beta\alpha)}Y^{(k)}_{pq}$$

keine letzten Krümmungsgleichungen (23).

Wir fassen das Ergebnis zusammen: *Erfüllt ein gegebenes Formensystem*

$$(24) \qquad {}_{(\alpha)}A_{p_1\ldots p_t} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, \ldots)$$

*die soeben abgeleiteten Bedingungsgleichungen, und zwar*

*a) die algebraischen,*

*b) die Gaußschen,*

*c) die Codazzischen,*

*so lassen sich die* ${}_{(\alpha\beta)}C_p$, *und zwar eindeutig, so berechnen, daß die Integrabilitätsbedingungen des Systems totaler Differentialgleichungen* (I) *und die Relationen* (3, 3), (3, 5) *und* (3, 8) *erfüllt sind. Die* ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ *sind durch die Tensoren* (24) *und deren Ableitungen bis einschließlich zur* $h$*ten Stufe darstellbar, wenn der größere der beiden Indizes* $\alpha$, $\beta$ *ein Index des* $J_h$ *ist.*

## § 5. Das Formenproblem.

Sind für ein System von $\nu$ linear unabhängigen Tensoren (Formen) einer $l$ dimensionalen Mannigfaltigkeit[1])

$$(\mathrm{I}) \qquad \left|\begin{array}{ll} {}_{(\alpha)}A_p & (\alpha = 1, \ldots, l) \\ {}_{(\alpha)}A_{pq} & (\alpha = l+1, \ldots, l+l_2) \\ {}_{(\alpha)}A_{pqr} & (\alpha = l+l_2+1, \ldots, l+l_2+l_3) \\ \cdots\cdots & \end{array}\right.$$

die am Schlusse des vorhergehenden Paragraphen aufgezählten Bedingungsrelationen erfüllt, so kann man die Koeffizientenvektoren ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ des Systems totaler Differentialgleichungen

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} dx_i = {}_{(\alpha)}A_p\,{}_{(\alpha)}\lambda_i\,dy_p \\ d\,{}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha\beta)}C_p\,{}_{(\beta)}\lambda_i\,dy_p \end{array}\right. \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, \nu;\ p = 1, \ldots, l;\ i = 1, \ldots, n)$$

*eindeutig* so berechnen, daß neben den Integrabilitätsbedingungen des Systems (1) die Relationen (3, 3), (3, 5) und (3, 8) *identisch* befriedigt sind.

1) D. h. die Koeffizienten in (I) sind Funktionen von $y_1, \ldots, y_l$ (also in einer $l$ dimensionalen Mannigfaltigkeit definiert), und die Indizes $p, q, r, \ldots$ laufen von 1 bis $l$.

Es gibt dann, sofern die Tensoren (I) und deren Ableitungen so weit stetig vorausgesetzt sind, daß die berechneten ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ selbst stetige Vektoren sind, ein *bestimmtes* Lösungssystem von (1)

(2) $$\begin{cases} {}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha)}\lambda_i(y_1, \ldots, y_l) \\ x_i = x_i(y_1, \ldots, y_l) \end{cases} \qquad (\alpha = 1, \ldots, \nu,\ i = 1, \ldots, n),$$

das den gegebenen Anfangswerten

(3) $$\begin{cases} {}_{(\alpha)}\lambda_i^0 = {}_{(\alpha)}\lambda_i(y_1^0, \ldots, y_l^0) \\ x_i^0 = x_i(y_1^0, \ldots, y_l^0) \end{cases} \qquad (\alpha = 1, \ldots, \nu,\ i = 1, \ldots, n)$$

entspricht. Wir setzen

(4) $${}_{(\alpha\beta)}\Phi = {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\beta)}\lambda_i.$$

Diese Skalare genügen dann wegen (1) gleichfalls einem Systeme totaler Differentialgleichungen

(5) $$d\,{}_{(\alpha\beta)}\Phi = [{}_{(\beta\gamma)}\Phi\, {}_{(\alpha\gamma)}C_p + {}_{(\alpha\gamma)}\Phi\, {}_{(\beta\gamma)}C_p]\, dy_p \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, \nu).$$

Wegen ${}_{(\alpha\beta)}C_p = -{}_{(\beta\alpha)}C_p$ ist ${}_{(\alpha\beta)}\Phi = \delta_{\alpha\beta}$ ein Lösungssystem von (5), und zwar jenes eindeutig bestimmte, das für $y_1^0, \ldots, y_l^0$ die Anfangswerte ${}_{(\alpha\beta)}\Phi^0 = \delta_{\alpha\beta}$ annimmt.

Ist $n \geqq \nu$, so können wir im Punkte $P_0(y_1^0, \ldots, y_l^0)$ unserer $l$ dimensionalen Mannigfaltigkeit die Anfangswerte ${}_{(\alpha)}\lambda_i^0$ so wählen, daß

(6) $${}_{(\alpha)}\lambda_i^0\, {}_{(\beta)}\lambda_i^0 = \delta_{\alpha\beta} \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, \ldots, \nu)$$

wird. Nach dem eben Gesagten gilt für das so bestimmte Lösungssystem (2) von (1) für jedes $l$-Tupel $y_1, \ldots, y_l$

(6′) $${}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\beta)}\lambda_i = \delta_{\alpha\beta}.$$

Deuten wir dieses Lösungssystem dann in einem auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen $R_n\{x_1, \ldots, x_n\}$, so stellt es eine $F_l$ dieses $R_n$ dar, in deren Punkten das normierte $\nu$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha = 1, \ldots, \nu)$ definiert ist.

*Wir behaupten nun, daß dieses $\nu$-Bein die $J_k$-Vektorräume dieser $F_l$ aufspannt und daß die ihm adjungierten Formen gerade die Formen* (I) *sind.*

Wenn wir im folgenden $\beta \prec J_k$ schreiben, so bedeutet das vorerst nur, daß der Index $\beta$ unter den Indizes $\alpha$ der Tensoren $k$ter Stufe ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}$ vertreten ist. Aus der Art der Berechnung der ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ folgt wegen (3, 5) und (3, 8)

(6″) $$\begin{cases} {}_{(\alpha\beta)}C_p = 0 & (\alpha \prec J_k,\ \beta \prec J_{k \pm r},\ r > 1) \\ {}_{(\alpha)}A_{r_1 \ldots r_k r_{k+1}} = {}_{(\gamma\alpha)}C_{r_{k+1}}\, {}_{(\gamma)}A_{r_1 \ldots r_k} & (\alpha \prec J_{k+1},\ \gamma \prec J_k). \end{cases}$$

Nun schreiben wir die erste Gleichung des Systems (1)

(7) $$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} = {}_{(\alpha)}A_p\, {}_{(\alpha)}\lambda_i \qquad (\alpha \prec J_1).$$

Durch Überschiebung mit ${}_{(\beta)}\lambda_i$ $(\beta \prec J_1)$ folgt

(7′) $${}_{(\beta)}A_p = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\, {}_{(\beta)}\lambda_i .$$

Nach (7) und (7′) haben die Matrizen $\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \right\|$ und $\|{}_{(\alpha)}A_p\|$ den gleichen Rang. Da die zweite infolge der vorausgesetzten Unabhängigkeit der $l$ Linearformen ${}_{(\alpha)}A_p$ den Rang $l$ hat, so gilt dies ebenfalls für die erste Matrix. Die Mannigfaltigkeit $x_i = x_i(y_1, \ldots, y_l)$ ist somit in der Tat eine $F_l$, deren Tangentenraum nach (7) durch das normierte $l$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ aufgespannt ist. Nach (7′) ist ${}_{(\alpha)}A_p$ $(\alpha \prec J_k)$ das diesem $l$-Bein adjungierte Formensystem.

Durch Differentiation von (7) erhalten wir wegen (1)

(8) $$\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} = \left[\frac{\partial\, {}_{(\alpha)}A_p}{\partial y_q} + {}_{(\gamma)}A_p\, {}_{(\gamma\alpha)}C_q\right] {}_{(\alpha)}\lambda_i .$$

Nach (6″) treten in die Darstellung (8) nur die Indizes $\alpha \prec J_1$, $\alpha \prec J_2$ ein. Für die Projektion des Vektors (8) in den ersten Normalenraum gilt nach (8)

(9) $$\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}} = {}_{(\gamma)}A_p\, {}_{(\gamma\alpha)}C_q\, {}_{(\alpha)}\lambda_i \qquad (\alpha \prec J_2),$$

also nach (6″)

(9′) $$\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}} = {}_{(\alpha)}A_{pq}\, {}_{(\alpha)}\lambda_i \qquad (\alpha \prec J_2).$$

Durch Überschiebung von (9′) mit ${}_{(\beta)}\lambda_i$ folgt

(9″) $${}_{(\beta)}A_{pq} = \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}}\, {}_{(\beta)}\lambda_i \qquad (\beta \prec J_2).$$

Nach (9′), (9″) haben die Matrizes $\left\| \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}} \right\|$ und $\|{}_{(\alpha)}A_{pq}\|$ den gleichen Rang. Infolge der linearen Unabhängigkeit der $l_2$ Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{pq}$ ist dieser Rang gleich $l_2$. Der $J_2$-Raum unserer $F_2$ ist also $l_2$ dimensional und wird nach (9) durch das normierte $l_2$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ $(\alpha \prec J_2)$ aufgespannt. Nach (9″) ist ${}_{(\beta)}A_{pq}$ $(\beta \prec J_2)$ das diesem $l_2$-Bein adjungierte Formensystem.

Sei nun diese Tatsache bereits für den $J_k$ und die vorhergehenden Vektorräume festgestellt. Es gelte also

(10) $$\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \ldots \partial y_{p_k}}} = {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}\, {}_{(\alpha)}\lambda_i \qquad (\alpha \prec J_k),$$

eine Relation, die für $k = 2$ in der Tat nachgewiesen wurde. Aus (10) folgt durch Differentiation

$$(11)\quad \frac{\partial}{\partial y_{\nu_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{\nu_1}\ldots\partial y_{\nu_k}}\right) = \text{Vektor des } J_{12\ldots k} + \sum_{\beta \prec J_{k+1}} {}_{(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k}\,{}_{(\alpha\beta)}C_{\nu_{k+1}}\,{}_{(\beta)}\lambda_i$$
$$= \text{Vektor des } J_{12\ldots k} + \sum_{\beta \prec J_{k+1}} {}_{(\beta)}A_{\nu_1\ldots\nu_k\nu_{\lambda+1}}\,{}_{(\beta)}\lambda_i.$$

Da aber nach (3, 7) die Projektion der linken Seite in den $J_{k+1}$ gleich $\frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{\nu_1}\ldots\partial y_{\nu_k}\partial y_{\nu_{\lambda+1}}}$ ist, so gilt

$$(12)\quad \frac{\partial^{k+1} x_i}{\partial y_{\nu_1}\ldots\partial y_{\nu_k}\partial y_{\nu_{k+1}}} = {}_{(\alpha)}A_{\nu_1\ldots\nu_k\nu_{k+1}}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i \qquad (\alpha \prec J_{k+1}).$$

Damit haben wir den *Satz I:*

*Zu einem Formensysteme* (I), *das die in* § 4 *angeführten Relationen erfüllt, gibt es immer eine $F_l$, die dieses Formensystem besitzt.*

Die Tensoren (I) einer $F_l$ sind infolge ihrer Bildung als innere Produkte von Vektoren (2, 4) invariant gegenüber den Transformationen der Bewegungsgruppe

$$(13)\quad \bar{x}_i = a_{ik} x_k + b_i,$$

wo $\|a_{ik}\|$ eine orthogonale Matrix ist. Da zwei kongruente (bzw. kongruente und gespiegelte) $F_l$ mittels einer Transformation (13) zusammenhängen, so ist jedes Formensystem der einen ein solches der anderen. Die Gesamtheit der äquivalenten Formensysteme der beiden $F_l$ ist gleich. Umgekehrt aber gilt der *Satz II*:

*Zwei $F_l$ mit gleichem Formensystem sind kongruent bzw. kongruent und gespiegelt.*

Seien $F_l$ und $\bar{F}_l$ zwei solche Flächen, die also ein-eindeutig aufeinander so bezogen seien, daß in entsprechenden Punkten die Tensoren (I) die nämlichen Komponenten haben. Dem Parameter $l$-Tupel $y_1^0, \ldots, y_l^0$ entspreche auf der $F_l$ der Punkt $P_0$ und auf der $\bar{F}_l$ der ($P_0$ zugeordnete) Punkt $\bar{P}_0$.

Weiter seien ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ und ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i$ die die $J_k$-Räume der $F_l$ bzw. $\bar{F}_l$ aufspannenden normierten $\nu$-Beine, deren adjungierte Formen nach Voraussetzung übereinstimmen. Durch eine Transformation der Gruppe (13) konnen wir das $\nu$-Bein in $P_0$, ${}_{(\alpha)}\lambda_i^0$, in das $\nu$-Bein ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i^0$ in $\bar{P}_0$ transformieren, wobei die $F_l$ in eine ihr kongruente $F_l$ mit gleichem Formensystem übergeht, die mit der $\bar{F}_l$ die „Lage" ($\bar{P}_0$, ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i^0$) gemeinsam hat. Der $\tilde{F}_l$ und der $\bar{F}_l$, die dasselbe Formensystem besitzen, entspricht das *bestimmte* System (1) totaler Differentialgleichungen, und da die beiden Hyperflächen eine Lage gemeinsam haben und durch diese Lage und (1) die beiden $F_l$ eindeutig bestimmt sind, so sind sie identisch.

Also läßt sich die $F_l$ durch eine Transformation der Bewegungsgruppe in die $\bar{F}_l$ transformieren, d. h. die beiden Flächen sind kongruent (oder kongruent und gespiegelt).

## § 6. Die Formenquadrate.

Es seien ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ und ${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i$ zwei äquivalente, die $J_k$-Räume einer $F_l$ aufspannende $\nu$-Beine und ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}$ und ${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k}$ die diesen Beinen adjungierten Formen dieser $F_l$. Dann gilt

(1) $${}_{(\alpha)}\bar{\lambda}_i = {}_{(\alpha\beta)}a\, {}_{(\beta)}\lambda_i \qquad (\alpha, \beta \prec J_k),$$

wobei die Matrix

(1') $$\| {}_{(\alpha\beta)}a \| \qquad (\alpha, \beta \prec J_k)$$

orthogonal ist. Wegen (2, 4) gilt dann für die äquivalenten Formen eine zu (1) analoge Beziehung

(2) $${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k} = {}_{(\alpha\beta)}a\, {}_{(\beta)}A_{p_1 \ldots p_k} \qquad (\alpha, \beta \prec J_k),$$

die für die Äquivalenz zweier Formensysteme — insofern die gleiche Parameterdarstellung der $F_l$ zugrunde liegt — auch hinreichend ist. Aus (2) folgt

(3) $${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k}\, {}_{(\alpha)}\bar{A}_{q_1 \ldots q_k} = {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}\, {}_{(\alpha)}A_{q_1 \ldots q_k},$$

d. h. der Tensor

(4) $$E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k} = {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}\, {}_{(\alpha)}A_{q_1 \ldots q_k}$$

ist von der besonderen Wahl des die $J_k$-Räume aufspannenden normierten $\nu$-Beins unabhängig. Dieser Tensor ist nach (2, 4) auch gleich

(4') $$\underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}}}\ \underline{\frac{\partial^k x_i}{\partial y_{q_1} \cdots \partial y_{q_k}}} = E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k}.$$

Wie (3) aus (2) folgte, so ist umgekehrt (2) eine Folge von (3), denn wegen der linearen Unabhängigkeit der $l_k$ Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}$ bzw. ${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k}$ ist neben (4)

(5) $$E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k} = {}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k}\, {}_{(\alpha)}\bar{A}_{q_1 \ldots q_k}$$

die kanonische Darstellung des Tensors $2k$ter Stufe $E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k}$ durch die Tensoren $k$ter Stufe ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}$ bzw. ${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k}$. Man betrachte, um dies einzusehen, einen Tensor $t_{p_1 \ldots p_k}$ als „Vektor" in einem Punkte eines $R_N$ von der Dimension $N = \binom{l+k-1}{k}$. Daraus folgt dann sofort, daß zwischen den ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}$ und den ${}_{(\alpha)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k}$ eine Transformation (2) mit orthogonaler Matrix besteht. Wir wollen jedoch noch einen direkten Beweis geben.

Es gibt $\infty^r$, $r = \binom{l+k-1}{k} - l_k$ Systeme von $l_k$ Tensoren ${}_{(\alpha)}\bar{A}^{q_1 \ldots q_k}$, die der Tensorrelation

(6) $${}_{(\alpha)}\bar{A}_{q_1 \ldots q_k}\, {}_{(\beta)}\bar{A}^{q_1 \ldots q_k} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta \prec J_k)$$

genügen. Ist dann

$$(6') \qquad {}_{(\alpha)}\bar{A}^{q_1 \cdots q_k} \qquad (\alpha \prec J_k)$$

ein solches System, so folgt durch Überschiebung von (3) mit ${}_{(\beta)}\bar{A}^{q_1 \cdots q_k}$

$$(7) \qquad {}_{(\beta)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k} = {}_{(\beta\,\alpha)}b\; {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k},$$

$$(7') \qquad {}_{(\beta\,\alpha)}b = {}_{(\alpha)}A_{q_1 \ldots q_k}\; {}_{(\beta)}\bar{A}^{q_1 \cdots q_k}.$$

Aus (5) und (6) folgt

$$(8) \qquad E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k}\; {}_{(\beta)}\bar{A}^{q_1 \cdots q_k} = {}_{(\beta)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k}$$

und weiter aus

$$(9) \qquad \begin{aligned} {}_{(\beta\,\alpha)}b\; {}_{(\gamma\,\alpha)}b &= {}_{(\alpha)}A_{q_1 \ldots q_k}\, {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}\; {}_{(\beta)}\bar{A}^{q_1 \cdots q_k}\, {}_{(\gamma)}\bar{A}^{p_1 \cdots p_k} \\ &= E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k}\, {}_{(\beta)}\bar{A}^{q_1 \cdots q_k}\, {}_{(\gamma)}\bar{A}^{p_1 \cdots p_k} \\ &= {}_{(\beta)}\bar{A}_{p_1 \ldots p_k}\; {}_{(\gamma)}\bar{A}^{p_1 \cdots p_k} = \delta_{\beta\gamma} \end{aligned}$$

die Orthogonalität der Matrix $\| {}_{(\alpha\beta)}b \|$.

Durch die $E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k}$ ist also das System der Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}$ bis auf orthogonale Transformationen, d. h. bis auf Äquivalenzen bestimmt. Die Anzahl der unabhängigen Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}$, die in die kanonische Darstellung eintreten, ist gleich dem Range der Matrix

$$(10) \qquad \left\| E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k} \right\|,$$

wo jeder Kombination $p_1, \ldots, p_k$ bzw. $q_1, \ldots, q_k$ eine Zeile bzw. Spalte entspricht. *Der Rang der Matrix* (10) *stimmt demnach mit der Dimension $l_k$ des $J_k$ überein.*

Die Tensoren

$$(11) \qquad E_{p|q}, \quad E_{p_1 p_2 | q_1 q_2}, \ldots, \quad E_{p_1 \ldots p_k | q_1 \ldots q_k}, \ldots,$$

die das System

$$(12) \qquad {}_{(\alpha)}A_p, \quad {}_{(\alpha)}A_{p_1 p_2}, \ldots, \quad {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}, \ldots$$

bis auf Äquivalenzen festlegen, bestimmen demnach auch eine gegebene $F_l$ bis auf Kongruenz (und Spiegelung).

Dasselbe gilt für die aus ihnen gebildeten Formen

$$(13) \qquad E_{p|q}\, dy_p\, dy_q, \quad E_{p_1 p_2 | q_1 q_2}\, dy_{p_1} dy_{p_2} dy_{q_1} dy_{q_2}, \ldots,$$

wenn wir zeigen können, daß diese Formen ihrerseits die Tensoren (11) bestimmen. Wegen $E_{p|q} = E_{q|p}$ können wir aus der (ersten) Form $E_{p|q}\, dy_p\, dy_q$, die im übrigen die Maßform der $F_l$ ist, die Koeffizienten $E_{p|q}$ berechnen. Wir nehmen nun an, daß die Bestimmung der Tensoren (11) bis zur $2k-2$ ten

Stufe aus den Formen (13) der Tensoren bis einschließlich $2k-2$ter Stufe bereits ausgeführt wäre, was für $k=2$ ja der Fall ist. Bezeichnen wir mit $B_{p_1 p_2 \ldots p_{2k}}$ den Koeffizienten von $dy_{p_1}\,dy_{p_2}\ldots dy_{p_{2k}}$ in

$$E_{p_1 \ldots p_k | \alpha_1 \ldots \alpha_k}\, dy_{p_1} \ldots dy_{p_k}\, dy_{\alpha_1} \ldots dy_{\alpha_k},$$

so gilt

$$(14)\qquad B_{p_1 p_2 \ldots p_{2k}} = \sum E_{\sigma_1 \ldots \sigma_k | \sigma_{k+1} \ldots \sigma_{2k}},$$

wo die Summe rechts über alle verschiedenen Permutationen $\sigma_1, \ldots, \sigma_{2k}$ von $p_1, \ldots, p_{2k}$ zu erstrecken ist. Nun ist $E_{p_1 \ldots p_k | p_{k+1} \ldots p_{2k}}$ sowohl in den $k$ ersten wie in den $k$ letzten Indizes symmetrisch. Bei Vertauschung eines der $k$ ersten mit einem der $k$ letzten Indizes gilt

$$(15)\quad E_{p_1 \ldots p_{k-1} p_k | p_{k+1} \ldots p_{2k-1} p_{2k}} - E_{p_1 \ldots p_{k-1} p_{2k} | p_{k+1} \ldots p_{2k-1} p_k}$$
$$= {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_{k-1} p_k}\, {}_{(\alpha)}A_{p_{k+1} \ldots p_{2k-1} p_{2k}} - {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_{k-1} p_{2k}}\, {}_{(\alpha)}A_{p_{k+1} \ldots p_{2k-1} p_k}.$$

Rechts steht nach (4, 16) der $k-1$te Krümmungstensor der $F_l$, der also durch die uns bekannten Formen bis zur $2k-2$ten Stufe ausdrückbar ist und somit als bereits bekannt zu gelten hat. Da sich jede der rechts in (14) auftretenden Größen $E_{\sigma_1 \ldots \sigma_k | \sigma_{k+1} \ldots \sigma_{2k}}$ durch eine beliebige von ihnen, z. B. $E_{p_1 \ldots p_k | p_{k+1} \ldots p_{2k}}$ durch fortgesetzte Vertauschung von Indizes gewinnen läßt, so kann man die rechte Seite von (14) in

$$E_{p_1 \ldots p_k | p_{k+1} \ldots p_{2k}} + \text{bekannte Größe}$$

umformen, und hierauf aus (14) $E_{p_1 \ldots p_k | \alpha_1 \ldots \alpha_k}$ berechnen. Wir haben damit den Nachweis geliefert, daß *das System der Formen* (13)

$$(16)\qquad E_{p_1 \ldots p_k | \alpha_1 \ldots \alpha_k}\, dy_{p_1} \ldots dy_{\alpha_k} = \sum \left({}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}\, dy_{p_1} \ldots dy_{p_k}\right)^2 \quad (\alpha \prec J_k)$$

*genau wie das System der* ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}\, dy_{p_1} \ldots dy_{p_k}$ *die* $F_l$ *bis auf Kongruenz bestimmt.*[1])

Die eigentliche Theorie der invarianten Formen einer $F_l$ des euklidischen $R_n$ ist damit beendigt. Die Bedeutung der Formen wird durch die Tatsache erhellt, daß jede geometrische Größe der $F_l$ sich durch diese Formen allein darstellen lassen muß.

---

1) Einen direkten, vom Formensystem der ${}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}\, dy_{p_1} \ldots dy_k$ keinen Gebrauch machenden Nachweis findet man in den Monatsheften für Math. u. Phys. XXXV: *Über das vollständige Formensystem einer $F_l$ im $R_n$.*

## § 7. Die Einbettungszahl einer $F_l$.

Liegt eine $F_l$ des euklidischen $R_n$ in einer $k$ dimensionalen Hyperebene $E_k$ des $R_n$, dagegen in keiner $k-1$ dimensionalen $E_{k-1}$, so heiße $k$ die *Einbettungszahl* der $F_l$; dabei ist jedenfalls $l \leqq k \leqq n$.

Für die Einbettungszahl $k$ besteht der Satz[1]): *Bedeutet $l_\sigma$ die Dimensionszahl des $J_\sigma$ der $F_l$, so ist*

$$k = \sum_{\sigma=1}^{r} l_\sigma, \tag{1}$$

*wo $J_r$ der letzte existierende $J_\sigma$-Vektorraum der $F_l$ ist, die Einbettungszahl der $F_l$.* Die Hyperebene geringster Dimension, in die die $F_l$ eingebettet werden kann, ist jedenfalls eine $E_k$; wenn wir nun zeigen, daß die $F_l$ des $R_n$ schon in einer $E_k$ liegt, so ist der Satz bewiesen.

Durch die Gleichungen

$$x_{k+t} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, n-k), \tag{2}$$

ist in unserem auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen $R_n$ eine Hyperebene $E_k$ definiert, in der

$$x_1, x_2, \ldots, x_k$$

rechtwinklige kartesische Koordinaten sind. Der $F_l$ entspricht das wiederholt benutzte System totaler Differentialgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} d x_i &= {}_{(\alpha)}A_p\, {}_{(\alpha)}\lambda_i\, d y_p \\ d\, {}_{(\alpha)}\lambda_i &= {}_{(\alpha\beta)}C_p\, {}_{(\beta)}\lambda_i\, d y_p \end{aligned}\right. \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, k,\ p = 1, \ldots, l), \tag{3}$$

das wir in der $E_k$ (2), also für $i = 1, \ldots, k$, bei vorgeschriebener Anfangslage

$$x_i^0, \quad {}_{(\alpha)}\lambda_i^0 \qquad (\alpha, i = 1, \ldots, k), \tag{4}$$

$${}_{(\alpha)}\lambda_i^0\, {}_{(\beta)}\lambda_i^0 = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, k) \tag{4'}$$

integrieren und so in der $E_k$ (2) eine $\overline{F}_l$

$$x_i = x_i(y_1, \ldots, y_l) \qquad (i = 1, \ldots, k) \tag{5}$$

und in ihren Punkten das *normierte* $k$-Bein

$${}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha)}\lambda_i(y_1, \ldots, y_l) \qquad (i, \alpha = 1, \ldots, k) \tag{5'}$$

*mit dem Formensystem der gegebenen $F_l$ erhalten.*

Wir betrachten jetzt im $R_n$ die $\tilde{F}_l$

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= x_i(y_1, \ldots, y_l) \qquad (i = 1, \ldots, k), \\ x_{k+t} &= 0 \qquad (t = 1, \ldots, n-k) \end{aligned}\right. \tag{6}$$

---

1) Man vergleiche den entsprechenden Satz für Kurven in IV, § 9.

und in deren Punkten das $k$-Bein

$$(7) \qquad \begin{cases} {}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha)}\lambda_i(y_1, \ldots, y_l) & (\alpha, i = 1, \ldots, k), \\ {}_{(\alpha)}\lambda_{k+t} = 0 & (t = 1, \ldots, n-k;\ \alpha = 1, \ldots, \lambda), \end{cases}$$

das wegen $\sum_{i=1}^{k} {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(\beta)}\lambda_i = \delta_{\alpha\beta}$ und ${}_{(\alpha)}\lambda_{k+t} = 0$ *ebenfalls normiert ist.* Wie (5) ist dann auch (6), (7) eine Lösung von (3), und da das $k$-Bein (7) normiert ist, so spannt es die $J_h$-Räume der $\tilde{F}_l$ auf, und diese hat so wie die $\bar{F}_l$ das Formensystem der $F_l$. Die $F_l$ und die $\tilde{F}_l$ sind also kongruent, und da die $\tilde{F}_l$ in einer $E_k$ liegt, so gilt das gleiche für die $F_l$, w. z. b. w.[1])

## § 8. Über die Krümmungstensoren der $F_l$.

Wir beweisen den Satz: *Verschwindet für eine $F_l$ des $R_n$ der $k$te Krümmungstensor*

$$(1) \qquad {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \ldots \nu_k \nu_{k+1}}\, {}_{(\gamma)}A_{\mu_1 \ldots \mu_k \mu_{k+1}} - {}_{(\gamma)}A_{\nu_1 \ldots \nu_k \mu_{k+1}}\, {}_{(\gamma)}A_{\mu_1 \ldots \mu_k \nu_{k+1}},$$

*so gibt es stets eine $\bar{F}_l$ des $R_n$, deren vollständiges Formensystem aus den Formen*

$$(2) \qquad {}_{(\alpha)}A_p, \quad {}_{(\alpha)}A_{pq}, \ldots, \quad {}_{(\alpha)}A_{p_1 \ldots p_k}$$

*der $F_l$ bis einschließlich zur $k$ten Stufe besteht.*

Für die $F_l$ gelten die Gleichungen (5, 1), wo $\nu = l + l_2 + \cdots + l_k + l_{k+1} + \cdots$ die Einbettungszahl der $F_l$ ist. Wir zeigen, daß folgendes aus (5, 1) gebildete System totaler Differentialgleichungen

$$(3) \qquad \begin{cases} dx_i = {}_{(\alpha)}A_p\, {}_{(\alpha)}\lambda_i\, dy_p \\ d\,{}_{(\alpha)}\lambda_i = {}_{(\alpha\beta)}C_p\, {}_{(\beta)}\lambda_i\, dy_p \end{cases} \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, l + l_2 + \cdots + l_k),$$

wo also die Indizes nur bis zum $J_k$ auftreten, bereits vollständig integrabel ist. „Aus (5, 1) gebildet“ bedeutet, daß die entsprechenden Koeffizientenvektoren, die in jenem System und in (3) auftreten, identisch sind. Diese Koeffizientenvektoren

$${}_{(\alpha)}A_p, \quad {}_{(\alpha\beta)}C_p \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, l + l_2 + \cdots + l_k)$$

1) Ist für das System $f_1(y, \ldots, y_l)$, $f_2(y_1, \ldots, y_l)$, $\ldots$, $f_m(y_1, \ldots, y_l)$ die Matrix $\left\| \frac{\partial f_i}{\partial y_p} \right\|$ vom Range $l$ und hat die Matrix

$$\left\| \cdots \frac{\partial f_i}{\partial y_p} \cdots \frac{\partial^2 f_i}{\partial y_p \partial y_q} \cdots \frac{\partial^3 f_i}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} \cdots \frac{\partial^k f_i}{\partial y_{p_1} \cdots \partial y_{p_k}} \cdots \right\|$$

den Rang $t$, so bestehen $m - t$ lineare Relationen $\alpha_i^{(h)} f_i = 0$ $(h = 1, \ldots, m - t)$ mit konstanten $\alpha_i^{(h)}$. Deutet man nämlich $x_i = f_i(y_1, \ldots, y_l)$ in einem auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen $R_m$, so ist diese Bemerkung eine Folge des eben bewiesenen Satzes.

sind dann (§ 4 Schlußsatz) durch die Tensoren (2) allein ausdrückbar. Nun sind die ${}_{(\alpha\beta)}C_k$ $(\alpha, \beta \prec J_{12\ldots k})$ aus den Formen (2) so berechnet, daß die Integrabilitätsbedingungen des Systems (3) völlig befriedigt sind bis auf die eine

(4) $$ {}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0 \qquad (\alpha \prec J_k, \beta \prec J_k$$

die sich nicht auf die entsprechende der $F_l$, d. h. des Systems (5, 1) reduziert. Nun lautet (4) in der Bezeichnungsweise von (4, 10)

(5) $$ {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq} = 0 \qquad (\alpha, \beta \prec J_k)$$

und ist, da die Matrix $\| {}_{(\alpha)}A_{\nu_1 \ldots \nu_k} \|$ den Rang $l_k$ hat, mit

(6) $$ {}_{(\alpha\beta)}Y^{(k)}_{pq}\, {}_{(\alpha)}A_{\nu_1 \ldots \nu_k}\, {}_{(\beta)}A_{\mu_1 \ldots \mu_k} = 0$$

identisch. Nach (4, 15) ist die linke Seite von (6) aber gleich dem $k$ten Krümmungstensor, der nach Voraussetzung für die $F_l$ verschwindet. Somit gilt (6), und wir können das System (3) bei beliebiger Anfangsbedingung für $y_1^0, \ldots, y_l^0$:

$$x_1^0, \ldots, \quad x_n^0, \quad {}_{(\alpha)}\lambda_i^0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, l + l_2 + \cdots + l_k)$$

$({}_{(\alpha)}\lambda_i^0\, {}_{(\beta)}\lambda_i^0 = \delta_{\alpha\beta})$ integrieren und erhalten eine $\overline{F}_l$ des Formensystems (2), deren Einbettungszahl $l + l_2 + \cdots + l_k$ ist.

Ist für eine $F_l$ der erste Krümmungstensor Null, so gibt es eine $\overline{F}_l$ mit demselben linearen Formensystem und der Einbettungszahl $l$, die also ein Teil einer $E_l$ ist. Die Maßform der $F_l$

$$B_{pq} = {}_{(\alpha)}A_p\, {}_{(\alpha)}A_q \qquad (\alpha = 1, \ldots, l)$$

ist auch die der $E_l$, also auf $B_{pq} = \delta_{pq}$ transformierbar. In der Tat ist fur $k = 1$ die linke Seite der Relation (4, 15) der RIEMANNsche Krümmungstensor der $F_l$.

## § 9. Kurven auf der $F_l$.

Sei

(1) $$x_i = x_i(y_1, \ldots, y_l) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

die Parameterdarstellung einer $F_l$ des auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen $R_n$ und

(2) $$y_p = y_p(s)$$

eine auf die Bogenlänge bezogene Kurve der $F_l$. Dann gilt für die Bogenlänge

(3) $$ds^2 = dx_i\, dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} dy_p\, dy_q = {}_{(\alpha)}A_p\, {}_{(\alpha)}A_q\, dy_p\, dy_q$$

und für die Tangente

(3′) $$\frac{dx_i}{ds} = {}_{(1)}\xi_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{dy_p}{ds} = {}_{(\alpha)}A_p \frac{dy_p}{ds}\, {}_{(\alpha)}\lambda_i.$$

Für die Krümmungen und Normalen der Kurve gilt ($k = 2, 3, 4, \ldots$)

$$(4)\quad \frac{{}_{(k)}\xi_i}{\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{k-1}} = \sum_{\alpha \prec J_{12\ldots k-1}} {}_{(\alpha)}T^{(k)}{}_{(\alpha)}\lambda_i + \sum_{\alpha\prec J_k}\left({}_{(\alpha)}A_{p_1\ldots p_k}\frac{dy_{p_1}}{ds}\cdots\frac{dy_{p_k}}{ds}\right){}_{(\alpha)}\lambda_i,$$

wo die Koeffizienten ${}_{(\alpha)}T^{(k)}$ durch die Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{p_1\ldots p_t}$ der $F_l$ bis einschließlich zur $k-1$ten Stufe und durch die $\frac{dy_p}{ds}, \frac{d^2y_p}{ds^2}, \ldots, \frac{d^ky_p}{ds^k}$ ausdrückbar sind.

Die Formel gilt für $k = 2$, da man aus (3′) durch Differentiation nach $s$

$$(5)\quad \frac{{}_{(2)}\xi_i}{\varrho_1} = \sum_{\alpha\prec J_1}\left[{}_{(\alpha)}A_p\frac{d^2y_p}{ds^2} + \left(\frac{\partial_{(\alpha)}A_p}{\partial y_q} + {}_{(\beta)}A_{p\,(\beta\alpha)}C_q\right)\frac{dy_p}{ds}\frac{dy_q}{ds}\right]{}_{(\alpha)}\lambda_i$$
$$+ \sum_{\alpha\prec J_2}\left({}_{(\alpha)}A_{pq}\frac{dy_p}{ds}\frac{dy_q}{ds}\right){}_{(\alpha)}\lambda_i$$

erhält und die in der ersten Summe rechts auftretenden ${}_{(\alpha\beta)}C_q$ ($\alpha, \beta \prec J_1$) allein durch die Tensoren erster Stufe ${}_{(\alpha)}A_p$ ausdrückbar sind.

Wir nehmen nun an, die Formel (4) sei bis zu einem gewissen $m$, also für $k = 2, 3, \ldots, m$ bewiesen; wir zeigen dann ihre Richtigkeit für $k = m + 1$.

Aus (4) erhalten wir durch Quadrieren

$$(6)\quad \frac{1}{(\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{k-1})^2} = \sum_{\alpha\prec J_{12\ldots k-1}}({}_{(\alpha)}T^{(k)})^2 + \sum_{\alpha\prec J_k}\left({}_{(\alpha)}A_{p_1\ldots p_k}\frac{dy_{p_1}}{ds}\cdots\frac{dy_{p_k}}{ds}\right)^2.$$

Das Produkt der $k-1$ ersten Krümmungen der Kurve (6) hängt somit von den Tensoren der $F_l$ bis zur $k$ten Stufe inklusive und den $\frac{dy_p}{ds}, \frac{d^2y_p}{ds^2}, \ldots, \frac{d^ky_p}{ds^k}$ ab. Nun differenzieren wir (4) für $k = m$ nach $s$

$$(7)\quad \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\varrho_1\cdots\varrho_{m-1}}\right){}_{(m)}\xi_i + \frac{1}{\varrho_1\cdots\varrho_{m-1}}\left[-\frac{{}_{(m-1)}\xi_i}{\varrho_{m-1}} + \frac{{}_{(m+1)}\xi_i}{\varrho_m}\right]$$
$$= \sum_{\alpha\prec J_{12\ldots m}} {}_{(\alpha)}U\,{}_{(\alpha)}\lambda_i + \sum_{\alpha\prec J_{m+1}} {}_{(\gamma)}A_{p_1\ldots p_m\,(\gamma\alpha)}C_{p_{m+1}}\frac{dy_{p_1}}{ds}\cdots\frac{dy_{p_{m+1}}}{ds}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i.$$

Die Koeffizienten ${}_{(\alpha)}U$ sind dabei durch die Tensoren der $F_l$ bis einschließlich zur $m$ten Stufe und durch die $\frac{dy_p}{ds}, \frac{d^2y_p}{ds^2}, \ldots, \frac{d^{m+1}y_p}{ds^{m+1}}$ bestimmt.

Führt man ${}_{(m)}\xi_i$ und ${}_{(m-1)}\xi_i$ aus (4) in (7) ein und berücksichtigt man, daß die Größen $\frac{1}{\varrho_1\cdots\varrho_{m-1}}$ und $\frac{1}{\varrho_{m-1}}$ als Quotient $\frac{1}{\varrho_1\cdots\varrho_{m-1}} : \frac{1}{\varrho_1\cdots\varrho_{m-2}}$ durch die Tensoren der $F_l$ bis einschließlich zur $m$ten Stufe und durch die $\frac{dy_p}{ds}, \ldots, \frac{d^my_p}{ds^m}$ bestimmt sind, so erhält man (4) für $k = m + 1$. Es gelten die Sätze:

*Haben (bei entsprechender Wahl der Parameter und der die $J_k$-Räume aufspannenden $\nu$-Beine) zwei Flächen des $R_n$, $F_l$ und $\overline{F}_l$ das System der Formen bis einschließlich zur $h$ten Stufe gleich, so haben entsprechende Kurven gleiche Bogenlängen und gleiche Krümmungen bis einschließlich zur $h-1$ten.* Daß die Bogenlängen gleich sind, folgt aus (3), daß die Krümmungen gleich sind, aus (6) für $k = 1, \ldots, h$.

*Besteht zwischen zwei Flächen $F_l$ und $\overline{F}_l$ des $R_n$ eine punktweise Zuordnung, in der entsprechende Kurven gleiche Bogenlängen und gleiche Krümmungen bis einschließlich zur $h-1$ten haben, so ist das Formensystem der beiden $F_l$ bis zu den Formen $h$ter Stufe inklusive gleich.* Aus (3) folgt die Identität der Formen ${}_{(\alpha)}A_p\, {}_{(\alpha)}A_q$ der beiden $F_l$, also die Äquivalenz der Linearformen, die bei geeigneter Wahl der $\nu$-Beine zu einer Identität gemacht werden kann. Aus (6), für $k=2$, folgt dann die Identität der Formen $\sum\limits_{\alpha \prec J_2} ({}_{(\alpha)}A_{pq}\, dy_p\, dy_q)^2$ der beiden $F_l$, die die Äquivalenz (Identität bei geeigneter Wahl der $\nu$-Beine) der Formen zweiter Stufe nach sich zieht. Gilt der zweite Satz für $k-1 < h$, d. h. folgt aus der Gleichheit von Bogenlängen und Krümmungen bis einschließlich der $k-2$ten die Gleichheit der Formen bis zur $k-1$ten Stufe, so folgt, da $k \leqq h$ ist, aus (6), deren linke Seite nach Annahme für beide $F_l$ übereinstimmt, daß die beiden $F_l$ auch die Form $\sum\limits_{\alpha \prec J_k}(A_{p_1 \ldots p_k}\, dy_{p_1} \ldots dy_{p_k})^2$ gleich haben. Gilt also der Satz für $\nu = k-1 < h$, so ist er somit für $\nu + 1 = k \leqq h$ und in der Folge für $h$ selbst bewiesen.

## § 10. Das Formensystem der $F_l$ im $n$ dimensionalen Raum $R_n$ der konstanten Krümmung $\varrho$.

Den $R_n$ denken wir uns auf irgendein zulässiges Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_n$ bezogen, die $F_l$ sei wie immer in der Parameterdarstellung

(1) $$x_i = x_i(y_1, \ldots, y_l)$$

gegeben. Weiter sei in den Punkten der $F_l$ ein *normiertes* $n$-Bein

(1′) $${}_{(\alpha)}\lambda^i$$

gegeben, dessen nähere Bestimmung einstweilen nicht beabsichtigt ist. Der Vektor des $R_n$[1])

(2) $$\frac{\mathfrak{d}\, {}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_j} = \frac{\partial\, {}_{(\alpha)}\lambda^i}{\partial y_j} + \left\{ {p\,q \atop i} \right\} {}_{(\alpha)}\lambda^p \frac{\partial x_q}{\partial y_j}$$

läßt sich dann mittels des $n$-Beins (1′) darstellen:

(3) $$\frac{\mathfrak{d}\, {}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_j} = {}_{(\alpha\beta)}C_j\, {}_{(\beta)}\lambda^i \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, n).$$

---

1) Fraktur-$\mathfrak{d}$ bezeichnet die absolute Ableitung im $R_n$ (Parameter fest!).

Durch Überschiebung von (3) mit ${}_{(\gamma)}\lambda_i$ ergibt sich wegen ${}_{(\gamma)}\lambda_i\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = \delta_{\alpha\gamma}$

(4) $${}_{(\alpha\gamma)}C_j = {}_{(\gamma)}\lambda_i \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_j} = -\,{}_{(\alpha)}\lambda^i \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\gamma)}\lambda_i}{\mathfrak{d} y_j} = -\,{}_{(\alpha)}\lambda_i \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\gamma)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_j} = -\,{}_{(\gamma\alpha)}C_j,$$

also ist

(4′) $${}_{(\alpha\beta)}C_j = -\,{}_{(\beta\alpha)}C_j.$$

Aus (3) bilden wir (4, 8)

(5) $$\frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_h \mathfrak{d} y_j} - \frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_j \mathfrak{d} y_h} = {}_{(\alpha\beta)}X_{jh\,(\beta)}\lambda^i.$$

Nun ist

(6) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_j} = \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} x_r}\,\frac{\partial x_r}{\partial y_j},$$

also[1])

(6′) $$\frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_h \mathfrak{d} y_j} - \frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} y_j \mathfrak{d} y_h} = \left[\frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} x_s \mathfrak{d} x_r} - \frac{\mathfrak{d}^2\,{}_{(\alpha)}\lambda^i}{\mathfrak{d} x_r \mathfrak{d} x_s}\right] \frac{\partial x_r}{\partial y_j}\,\frac{\partial x_s}{\partial y_h}.$$

Nach (VI, 2, 29) gilt also

(7) $$-\,R^i_{.crs\,(\alpha)}\lambda^c \frac{\partial x_r}{\partial y_j}\,\frac{\partial x_s}{\partial y_h} = {}_{(\alpha\beta)}X_{jh\,(\beta)}\lambda^i.$$

*Wir bemerken für später, daß* (7) *die Integrabilitätsbedingungen von* (3) *sind.* Setzen wir noch

(8) $$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} = {}_{(\alpha)}A_{p\,(\alpha)}\lambda^i \qquad (\alpha = 1, \ldots, n),$$

so ist (7) äquivalent mit

(8′) $$-\,R^i_{.prs\,(\alpha)}\lambda^p\,{}_{(\beta)}\lambda^r\,{}_{(\gamma)}\lambda^s\,{}_{(\beta)}A_{j\,(\gamma)}A_h = {}_{(\alpha\beta)}X_{jh\,(\beta)}\lambda^i.$$

Durch Überschiebung mit ${}_{(\varepsilon)}\lambda_i$ folgt

(9) $${}_{(\alpha\varepsilon)}X_{jh} = -\,R_{iprs\,(\varepsilon)}\lambda^i\,{}_{(\alpha)}\lambda^p\,{}_{(\beta)}\lambda^r\,{}_{(\gamma)}\lambda^s\,{}_{(\beta)}A_{j\,(\gamma)}A_h.$$

Nun gilt aber

(10) $$R_{iprs} = \varrho\,(g_{ir}g_{ps} - g_{is}g_{pr}),$$

andererseits ist wegen ${}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(\beta)}\lambda^i = \delta_{\alpha\beta}$

$$(g_{ir}g_{cs} - g_{is}g_{cr})\,{}_{(\varepsilon)}\lambda^i\,{}_{(\alpha)}\lambda^c\,{}_{(\beta)}\lambda^r\,{}_{(\gamma)}\lambda^s = \delta_{\varepsilon\beta}\delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\varepsilon\gamma}\delta_{\alpha\beta},$$

also wird (9)

$${}_{(\alpha\varepsilon)}X_{jh} = -\,\varrho\,(\delta_{\varepsilon\beta}\delta_{\alpha\gamma} - \delta_{\varepsilon\gamma}\delta_{\alpha\beta})\,{}_{(\beta)}A_{j\,(\gamma)}A_h = -\,\varrho\,({}_{(\varepsilon)}A_{j\,(\alpha)}A_h - {}_{(\alpha)}A_{j\,(\varepsilon)}A_h).$$

Somit sind

(11) $${}_{(\alpha\beta)}X_{jh} = \varrho\,[{}_{(\alpha)}A_{j\,(\beta)}A_h - {}_{(\alpha)}A_{h\,(\beta)}A_j]$$

die Integrabilitätsbedingungen des Systemes (3); sie treten an die Stelle der Relationen ${}_{(\alpha\varepsilon)}X_{jh} = 0$ für $\varrho = 0$. Weiter benötigen wir die Integrabilitätsbedingungen des Systems (8); sie lauten[1])

1) Es ist $\dfrac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} y_p}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_q}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y_p}\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_q}\right) + \left\{ {rs \atop i} \right\} \dfrac{\partial x_r}{\partial y_p}\,\dfrac{\partial x_s}{\partial y_q}.$

$$0 = \frac{\partial}{\partial y_q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right) - \frac{\partial}{\partial y_p}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_q}\right) = \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} y_q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\right) - \frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{d} y_p}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_q}\right)$$

$$= \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}A_p}{\mathfrak{d} y_q}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i + {}_{(\alpha)}A_{p\,(\alpha\beta)}C_{q\,(\beta)}\lambda_i - \frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}A_q}{\mathfrak{d} y_p}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i - {}_{(\alpha)}A_{q\,(\alpha\beta)}C_{p\,(\beta)}\lambda_i$$

$$= \left[\frac{\partial\,{}_{(\alpha)}A_p}{\partial y_q} - \frac{\partial\,{}_{(\alpha)}A_q}{\partial y_p} + {}_{(\beta)}A_{p\,(\beta\alpha)}C_q - {}_{(\beta)}A_{q\,(\beta\alpha)}C_p\right]{}_{(\alpha)}\lambda_i;$$

daraus folgt wie im euklidischen Fall

$$\frac{\partial\,{}_{(\alpha)}A_p}{\partial y_q} - \frac{\partial\,{}_{(\alpha)}A_q}{\partial y_p} + {}_{(\beta)}A_{p\,(\beta\alpha)}C_q - {}_{(\beta)}A_{q\,(\beta\alpha)}C_p = 0. \tag{12}$$

*Wir definieren nun im Punkte $P$ der $F_l$ die $J_{123\ldots k}$-Räume.* Es ist der $J_1$ der kleinste Vektorraum in $P$, der die Tangenten aller Flächenkurven in $P$ enthält, der $J_{12}$ der kleinste Vektorraum in $P$, der die Tangenten und ersten Normalen aller dieser Kurven enthält, usw., der $J_{123\ldots k}$ der kleinste Vektorraum in $P$, der die Tangenten, ersten usw. bis $k-1$ten Normalen aller dieser Kurven enthält.[1]) Dann ist der $J_2$ als größter im $J_{12}$ normal zum $J_1$ gelegener Vektorraum, der $J_3$ als größter im $J_{123}$ normal zum $J_{12}$ gelegener Vektorraum und allgemein der $J_k$ als größter im $J_{12\ldots k}$ normal zum $J_{12\ldots k-1}$ gelegener Vektorraum definiert. Völlig analog wie im euklidischen Falle ist das (bis auf Äquivalenz bestimmte) die $J_k$ aufspannende $\nu$-Bein definiert. Wir ergänzen es durch ein normiertes $n-\nu$-Bein zu einem normierten $n$-Bein ${}_{(\alpha)}\lambda^i$.

Nehmen wir dieses für das $n$-Bein (1'), so ist nach (8)

$${}_{(\alpha)}A_, = 0, \tag{13}$$

sobald $\alpha$ kein Index des $J_1$-Raumes ist. In den Integrabilitätsbedingungen (11) verschwindet demnach die rechte Seite, wenn $\alpha$ oder $\beta$ ein Index des $J_2, J_3\ldots$ ist. Sei jetzt

$${}_{(\alpha)}\lambda_i \tag{14}$$

ein Vektor des $J_\sigma$, $\alpha \prec J_\sigma$, wobei $\sigma \neq 1$ ist, dann gilt für die Tangente einer jeden in der $F_l$ liegenden Kurve $C$

$${}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(1)}\xi^i = 0. \tag{15}$$

Nach der Bogenlänge differenziert, ergibt (15)

$$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\mathfrak{d} s}\,{}_{(1)}\xi^i = -\,{}_{(\alpha)}\lambda_i\,\frac{{}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1} \qquad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma \neq 1), \tag{16}$$

---

1) Korrekter, jedoch umständlicher wäre es, den $J_{12\ldots k}$-Raum als den durch die Vektoren ${}_{(1)}\xi_i$, $\frac{{}_{(2)}\xi_i}{\varrho_1}, \ldots, \frac{{}_{(k)}\xi_i}{\varrho_1\cdots\varrho_{k-1}}$ aller Kurven der $F_l$ durch $P$ aufgespannten Vektorraum zu definieren. Im allgemeinen (vielleicht sogar immer) fällt diese Definition mit der obigen zusammen (vgl. die Fußnoten S. 206 und 230.)

also nach (3)

(16′) $$_{(\alpha\beta)}C_j \frac{dy_j}{ds}\, {}_{(1)}\xi^i\, {}_{(\beta)}\lambda_i = -\frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1}.$$

Nun ist $${}_{(1)}\xi^i = \frac{dx_i}{ds} = {}_{(\gamma)}A_h \frac{dy_h}{ds}\, {}_{(\gamma)}\lambda^i,$$

also wird (16′)

(17) $$_{(\alpha\beta)}C_j\, {}_{(\beta)}A_h \frac{dy_j}{ds}\frac{dy_h}{ds} = -\frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1} \qquad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma \neq 1).$$

Wenn wir in (12) $\alpha \prec J_\sigma$, $\sigma \neq 1$, setzen, erhalten wir wegen (13)

(18) $$_{(\alpha\beta)}C_j\, {}_{(\beta)}A_h = {}_{(\alpha\beta)}C_h\, {}_{(\beta)}A_j \qquad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma \neq 1).$$

Demnach sind die Tensoren

(19) $$-{}_{(\alpha)}A_{jh} = {}_{(\alpha\beta)}C_j\, {}_{(\beta)}A_h \qquad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma \neq 1)$$

symmetrisch und statt (17) gilt

(20) $$_{(\alpha)}A_{jh} \frac{dy_j}{ds}\frac{dy_h}{ds} = +\frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1} \qquad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma \neq 1).$$

Zufolge der Definition der $J_k$-Räume verschwindet die rechte Seite von (20), wenn $\alpha$ ein Index des $J_\sigma$, $\sigma > 2$ ist. Wegen der Symmetrie des Tensors ${}_{(\alpha)}A_{jh}$ ist demzufolge

(21) $$_{(\alpha)}A_{jh} = 0,$$

wenn $\alpha$ ein Index des $J_\sigma$, $\sigma > 2$ ist. Somit existieren die ${}_{(\alpha)}A_{jh}$ nur für $\alpha \prec J_2$.

Die Relationen (19) sind ein System von linearen Gleichungen zur Berechnung der ${}_{(\alpha\beta)}C_j$ wo $\alpha \prec J_\sigma$, $\sigma \neq 1$, und $\beta \prec J_1$ ist. Für $\alpha \prec J_\sigma$, $\sigma > 2$ verschwinden in (19) die linken Seiten. Da unsere $F_l$ in jedem Punkte einen $l$ dimensionalen Tangentenraum $J_1$ hat, muß nach (8)

$$|\,{}_{(\beta)}A_h\,| \neq 0$$

sein. Dann aber folgt aus (19)

(22) $$_{(\alpha\beta)}C_j = 0 \qquad (\beta \prec J_1,\ \alpha \prec J_\sigma,\ \sigma > 2).$$

Die quadratischen Formen

(23) $$_{(\alpha)}\Pi = {}_{(\alpha)}A_{jh} \frac{dy_j}{ds}\frac{dy_h}{ds} \qquad (\alpha \prec J_2)$$

sind linear unabhängig. Aus einer Relation

(24) $$_{(\alpha)}p\, {}_{(\alpha)}\Pi = 0$$

folgt nach (20)

(25) $$_{(\alpha)}p\, {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(2)}\xi^i = 0 \qquad (\alpha \prec J_2).$$

Der Vektor ${}_{(\alpha)}p\,{}_{(\alpha)}\lambda_i$, $\alpha \prec J_2$, des $J_2$ wäre zu allen ${}_{(2)}\xi^i$ senkrecht und müßte demnach der Nullvektor sein, d. h. es müßte ${}_{(\alpha)}p = 0$ sein.[1])

Da es höchstens $\binom{l+1}{2}$ unabhängige Formen ${}_{(\alpha)}\Pi$ geben kann, ist die Dimension $l_2$ des $J_2$ höchstens $\binom{l+1}{2}$, und die Matrix

$$\| {}_{(\alpha)}A_{jh} \| \tag{26}$$

vom Range $l_2$.

Wir haben die Linearformen und Formen zweiter Stufe völlig analog wie im euklidischen Fall definiert. Wir nehmen nun an, dies sei uns bis zu den Formen $k$ter Stufe einschließlich gelungen und es gelte

$$\frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(h)}\xi^i}{\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{h-1}} = {}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_h}\frac{dy_{j_1}}{ds}\cdots\frac{dy_{j_h}}{ds} = {}_{(\alpha)}K \quad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma > h-1) \tag{27}$$

völlig analog wie (2, 10) mit symmetrischen und linear unabhängigen ${}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_h}$ für alle $h \leqq k$. Desgleichen sei

$${}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_h} = {}_{(\beta\alpha)}C_{j_h}\,{}_{(\beta)}A_{j_1\ldots j_{h-1}} \qquad (\alpha \prec J_h,\ \beta \prec J_{h-1}) \tag{28}$$

bereits nachgewiesen, und ebenso

$$0 = {}_{(\beta\alpha)}C_{j_h}\,{}_{(\beta)}A_{j_1\ldots j_{h-1}} \qquad (\beta \prec J_{h-1},\ \alpha \prec J_\sigma,\ \sigma > h). \tag{29}$$

Aus (29) und der linearen Unabhängigkeit der ${}_{(\beta)}A_{j_1\ldots j_{h-1}}$ folgt dann

$${}_{(\beta\alpha)}C_j = 0 \qquad (\beta \prec J_{h-1},\ \alpha \prec J_\sigma,\ \sigma > h). \tag{30}$$

Den Rang der Matrix

$$\| {}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_h} \|, \tag{31}$$

der gleich der Dimension des $J_h$ ist, bezeichnen wir mit $l_h$.

*Für $k = 2$ sind die obigen Voraussetzungen erfüllt.* Wir beweisen dann, daß auch für $h = k+1$ die Relationen (27) bis (30) gelten. Sei ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ ein Vektor des $J_\sigma$, $\sigma > k$, so gilt[2])

$${}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(k)}\xi^i = 0. \tag{32}$$

1) Eigentlich folgt, daß ${}_{(\alpha)}p\,{}_{(\alpha)}\lambda_i$ auf allen Vektoren $\frac{{}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1}$ normal steht. Das gibt eine Schwierigkeit, der man am besten ausweicht, wenn man den $J_{12}$ als den durch die Vektoren ${}_{(1)}\xi^i$ und $\frac{{}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1}$ aufgespannten Vektorraum definiert.

2) Definiert man $J_{12\ldots k} \equiv \left\{ {}_{(1)}\xi^i, \frac{{}_{(2)}\xi^i}{\varrho_1}, \ldots, \frac{{}_{(k)}\xi^i}{\varrho_1\cdots\varrho_{k-1}} \right\}$,

so tritt an Stelle von (32) $\frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(k)}\xi^i}{\varrho_1\cdots\varrho_{k-1}} = 0.$

An den weiteren Resultaten ändert das nichts, wie man sich bei einfacher Modifikation der Schlüsse leicht überlegt.

Durch Differentiation nach $s$ folgt daraus

(33) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\mathfrak{d}s}\,{}_{(k)}\xi^i = -\,{}_{(\alpha)}\lambda_i\left[-\frac{{}_{(k-1)}\xi^i}{\varrho_{k-1}} + \frac{{}_{(k+1)}\xi^i}{\varrho_k}\right] = -\frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(k+1)}\xi^i}{\varrho_k} \qquad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma > k).$$

Nach (3) ist

(34) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\mathfrak{d}s}\,{}_{(k)}\xi^i = {}_{(\alpha\beta)}C_r\,\frac{dy_r}{ds}\,{}_{(\beta)}\lambda_i\,{}_{(k)}\xi^i.$$

Da $\alpha \prec J_\sigma$, $\sigma > k$ ist, durchläuft $\beta$ in (34) wegen (30) die Indizes des $J_k$, $J_{k+1}$, $J_{k+2}$, ..., usw.

Wir können daher (27) benutzen und erhalten weiter

(35) $$\frac{\mathfrak{d}\,{}_{(\alpha)}\lambda_i}{\mathfrak{d}s}\,\frac{{}_{(k)}\xi^i}{\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{k-1}} = {}_{(\alpha\beta)}C_r\,\frac{dy_r}{ds}\,{}_{(\beta)}A_{j_1\ldots j_k}\,\frac{dy_{j_1}}{ds}\cdots\frac{dy_{j_k}}{ds} \quad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma > k).$$

Wir setzen

(36) $${}_{(\beta)}A_{j_1\ldots j_k}\,{}_{(\beta\alpha)}C_{j_{k+1}} = {}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_k j_{k+1}}$$

und beweisen die Symmetrie dieses Tensors $k+1$ter Stufe mit Benutzung der Integrabilitätsbedingung (11) für $\alpha \prec J_{k-1}$, $\beta \prec J_\sigma$, $\sigma > k$. Diese Relation lautet

(37) $${}_{(\alpha\gamma)}C_h\,{}_{(\gamma\beta)}C_r - {}_{(\alpha\gamma)}C_r\,{}_{(\gamma\beta)}C_h = 0 \quad (\alpha \prec J_{k-1},\ \beta \prec J_\sigma,\ \sigma > k).$$

Durch Überschiebung von (37) mit ${}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_{k-1}}$ folgt wegen (28)

(38) $${}_{(\gamma)}A_{j_1\ldots j_{k-1}h}\,{}_{(\gamma\beta)}C_r = {}_{(\gamma)}A_{j_1\ldots j_{k-1}r}\,{}_{(\gamma\beta)}C_h$$

oder

(38′) $${}_{(\beta)}A_{j_1\ldots j_{k-1}hr} = {}_{(\beta)}A_{j_1\ldots j_{k-1}rh}.$$

Da der Tensor (36) in den $k$ ersten Indizes symmetrisch ist, so ist er nach (38′) überhaupt symmetrisch. Nach (33), (35) und (36) gilt

(39) $$\frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(k+1)}\xi^i}{\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_k} = {}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_{k+1}}\,\frac{dy_{j_1}}{ds}\cdots\frac{dy_{j_{k+1}}}{ds} \qquad (\alpha \prec J_\sigma,\ \sigma > k).$$

Für $\alpha \prec J_{k+2}, J_{k+3}, \ldots$ verschwindet die linke Seite, also auch ${}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_{k+1}}$, welcher Tensor somit nur für $\alpha \prec J_{k+1}$ nicht verschwindet. Daraus und aus der linearen Unabhängigkeit der Tensoren ${}_{(\beta)}A_{j_1\ldots j_k}$ folgt nach (36) die Gültigkeit der Relation (30) für $\beta \prec J_k$, $\alpha \prec J_\sigma$, $\sigma > k+1$.

Die Unabhängigkeit der Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_{k+1}}$, $\alpha \prec J_{k+1}$, beweist man analog (24) und (25).

*Wir konnten somit, und zwar völlig analog wie im euklidischen Fall die symmetrischen Tensoren* ${}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_t}$, $\alpha \prec J_t$, *der* $F_l$ *definieren; für sie, bzw. für die Vektoren* ${}_{(\alpha\beta)}C_p$ *gelten die wichtigen Relationen* (3, 3), (3, 5) und (3, 8).

Wir können nun im System totaler Differentialgleichungen

(40) $$\begin{cases} dx_i = {}_{(\alpha)}A_j\,{}_{(\alpha)}\lambda^i\,dy_j, \\ d\,{}_{(\alpha)}\lambda^i = \left[-\left\{ {p\,q \atop i} \right\}{}_{(\alpha)}\lambda^p\,{}_{(\beta)}\lambda^q\,{}_{(\beta)}A_j + {}_{(\alpha\beta)}C_j\,{}_{(\beta)}\lambda^i\right] dy_j \end{cases}$$

aus den Formen ${}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_l}$ der $F_l$ mittels der Relationen (3, 3), (3, 5), (3, 8) und den Integrabilitätsbedingungen (11), (12) von (40) die Koeffizientenvektoren ${}_{(\alpha\beta)}C_j$, und zwar völlig analog wie im euklidischen Fall berechnen. Denn alle zur Berechnung hier aufgezählten Relationen *sind für diesen wie für den euklidischen Fall identisch* bis auf die eine (11) für $\alpha, \beta < J_1$. Aber diese tritt nur als Bedingungsgleichung für die Tensoren ${}_{(\alpha)}A_{p_1}$, ${}_{(\alpha)}A_{p_1 p_2}$ auf und ist die bekannte GAUSSsche Krümmungsgleichung.

An Stelle von ${}_{(\alpha)}A_j\, {}_{(\beta)}A_h\, {}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = 0$ im euklidischen Fall besteht hier

$$(41)\qquad {}_{(\alpha)}A_j\, {}_{(\beta)}A_h\left[{}_{(\alpha\beta)}X_{pq} - \varrho\left({}_{(\alpha)}A_p\, {}_{(\beta)}A_q - {}_{(\alpha)}A_q\, {}_{(\beta)}A_p\right)\right] = 0,$$

oder, wenn man den Maßtensor

$$(42)\qquad \gamma_{jq} = {}_{(\alpha)}A_j\, {}_{(\alpha)}A_q$$

der $F_l$ einführt,

$$(43)\qquad {}_{(\alpha)}A_j\, {}_{(\beta)}A_h\, {}_{(\alpha\beta)}X_{pq} = \varrho\left(\gamma_{jp}\gamma_{hq} - \gamma_{jq}\gamma_{hp}\right).$$

Alle weiteren Schlüsse, die völlig analog wie im euklidischen Fall verlaufen, seien dem Leser überlassen. Es ist vor allem zu zeigen, daß bei einer Anfangslage $x_i^0$, ${}_{(\alpha)}\lambda_i^0$, $({}_{(\alpha)}\lambda_i^0\, {}_{(\beta)}\lambda_i^0 = \delta_{\alpha\beta})$ ein Lösungssystem von (40) eine $F_l$ mit dem gegebenen Formensystem definiert. Aber auch diese Überlegung ist von der entsprechenden, für den euklidischen $R_n$ geführten nicht verschieden. Aus (27) folgt

$$(44)\qquad \frac{\left({}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(h)}\xi^i\right)\cdot\left({}_{(\alpha)}\lambda^j\, {}_{(h)}\xi_j\right)}{(\varrho_1\varrho_2\cdots\varrho_{h-1})^2} = \frac{\delta^j_i\, {}_{(h)}\xi^i\, {}_{(h)}\xi_j}{(\varrho_1\cdots\varrho_{h-1})^2} = \frac{{}_{(h)}\xi^i\, {}_{(h)}\xi_i}{(\varrho_1\cdots\varrho_{h-1})^2}$$
$$= {}_{(\alpha)}A_{j_1\ldots j_h}\, {}_{(\alpha)}A_{t_1\ldots t_h}\frac{dy_{j_1}}{ds}\cdots\frac{dy_{j_h}}{ds}\,\frac{dy_{t_1}}{ds}\cdots\frac{dy_{t_h}}{ds}$$

als *Definitionsgleichung der Formenquadrate*, die — wie im euklidischen — die $F_l$ bis auf ihre Lage im Raum (Kongruenz) bestimmen.

# Anhang.

## I. Die Erweiterung des Satzes von Meusnier für die $F_l$ des euklidischen $R_n$.

Wir werden im folgenden mehr skizzieren und auf Details nicht eingehen. Zugrunde liegt eine $F_l$

$$x_i = x_i(y_1, \ldots, y_l) \tag{1}$$

des auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen $R_n$.

Den Normalenraum $N_{(n-l)}$ denken wir uns in jedem Punkte der $F_l$ durch das normierte $n-l$-Bein

$$_{(\alpha)}\lambda_i \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-l) \tag{2}$$

aufgespannt. Ist dann

$$y_p = y_p(s) \qquad (p = 1, \ldots, l) \tag{3}$$

eine auf die Bogenlänge bezogene Kurve $C$ der $F_l$ und $_{(1)}\xi_i = \frac{d\,x_i}{d\,s}$ ihre Tangente. so gilt längs $C$

$$_{(\alpha)}\lambda_i\, _{(1)}\xi_i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-l) \tag{4}$$

Durch Differentiation von (4) nach $s$ ergibt sich

$$\frac{d_{(\alpha)}\lambda_i}{ds}\, _{(1)}\xi_i = -\, _{(\alpha)}\lambda_i \frac{_{(2)}\xi_i}{\varrho_1}. \tag{5}$$

Nun ist $\frac{d_{(\alpha)}\lambda_i}{d\,s} = \frac{\partial_{(\alpha)}\lambda_i}{\partial\, x_k}\, _{(1)}\xi_k$ nur vom Punkte $x_k$ und der Tangentenrichtung $_{(1)}\xi_k$ der Kurve in $P$ abhängig. Also folgt aus (5):

*Alle Kurven der $F_l$, deren Tangenten und erste Normalen in einem Punkte $P$ übereinstimmen, haben in $P$ dieselbe erste Krümmung.*

Durch Überschiebung von (5) mit $_{(\alpha)}\lambda_k$ folgt

$$_{(\alpha)}\lambda_k \frac{d_{(\alpha)}\lambda_i}{ds}\, _{(1)}\xi_i = -\frac{1}{\varrho_1}\, \underline{_{(2)}\xi_k}, \tag{6}$$

wo

$$\underline{_{(2)}\xi_k} = {}_{(\alpha)}\lambda_k\, _{(\alpha)}\lambda_i\, _{(2)}\xi_i \tag{6'}$$

der Projektionsvektor von $_{(2)}\xi_i$ in den Normalenraum $N_{(n-l)}$ ist. Aus (6) folgt: *Der Projektionsvektor der ersten Normalen aller Kurven der gleichen Tangente in den Normalraum $N_{(n-l)}$ der $F_l$ hat für alle diese Kurven die gleiche Richtung.*

Den Schnitt der $F_l$ mit der durch $_{(1)}\xi_i$ und $N_{(n-l)}$ (also durch Tangente und Normalraum in $P$) aufgespannten $E_{n-l+1}$ bezeichnen wir als *Normal-*

*schnitt I.* Diese $E_{n-l+1}$ ist durch $l-1$ Gleichungen, die $F_l$ durch $n-l$ Gleichungen zwischen den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ angebbar, der Schnitt also durch $n-l+l-1=n-1$ Gleichungen. *Der Normalschnitt I ist also eine Kurve der $F_l$.*

Mit ${}_{(1)}\Xi_i^{(1)}$, ${}_{(2)}\Xi_i^{(1)}$ usw. bezeichnen wir das begleitende Bein des Normalschnittes $I$; *in* $P$ gilt dann

(7) $${}_{(1)}\Xi_i^{(1)} = {}_{(1)}\xi_i .$$

Ist nämlich ${}_{(\beta)}\nu_i$ das normierte, den Normalenraum der $E_{n-l+1}$ aufspannende $l-1$-Bein, so gilt *in* $P$

(8) $${}_{(\beta)}\nu_i\,{}_{(1)}\xi_i = 0, \quad {}_{(\beta)}\nu_i\,{}_{(\alpha)}\lambda_i = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, n-l,\ \beta = 1, \ldots, l-1).$$

Nun ist ${}_{(1)}\xi_i$ in $P$ durch die $n-1$ linear unabhängigen Gleichungen

(9) $${}_{(\beta)}\nu_i\,{}_{(1)}\xi_i = 0 \quad (\beta = 1, \ldots, l-1), \qquad {}_{(\alpha)}\lambda_i\,{}_{(1)}\xi_i = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-l)$$

völlig bestimmt. Da aber ${}_{(1)}\Xi_i^{(1)}$ in $P$ als Tangente der im $E_{n-l+1}$ liegenden Kurve der $F_l$ den Gleichungen (9) ebenfalls genügen muß, so folgt die Beziehung (7) in $P$.

Der Vektor ${}_{(2)}\Xi_i^{(1)}(P)$ liegt in der $E_{n-l+1}\left\{{}_{(1)}\xi_i(P),\ N_{(n-l)}(P)\right\}$, und da er senkrecht zu ${}_{(1)}\Xi_i^{(1)}(P) = {}_{(1)}\xi_i(P)$ ist, muß er im Normalenvektorraum $N_{(n-l)}(P)$ enthalten sein. Bezeichnet $\frac{1}{\mathrm{P}_1}$ die erste Krümmung des Normalschnittes in $P$, so gilt nach (6)

(10) $$\frac{1}{\mathrm{P}_1}\,{}_{(2)}\Xi_k^{(1)} = \frac{1}{\varrho_1}\,\underline{{}_{(2)}\xi_k}.$$

Überschiebung mit ${}_{(2)}\Xi_k^{(1)}$ ergibt endlich

(11) $$\varrho_1 = \mathrm{P}_1\,{}_{(2)}\Xi_k^{(1)}\,{}_{(2)}\xi_k = \mathrm{P}_1 \cos\left({}_{(2)}\Xi^{(1)},\ {}_{(2)}\xi\right),$$

da ${}_{(2)}\Xi_k^{(1)}\,\underline{{}_{(2)}\xi_k} = {}_{(2)}\Xi_k^{(1)}\,{}_{(2)}\xi_k$ ist.

Die Relation (11) stellt den Satz von MEUSNIER dar, *sie gilt in jedem Riemannschen $R_n$*, nur tritt an Stelle der im allgemeinen nicht existierenden $E_{n-l+1}$ eine in $P$ durch ${}_{(1)}\xi_i$, $N_{(n-l)}$ aufgespannte, *in P geodätische $F_{n-l+1}$*. Wir wollen nur kurz zeigen, daß dieser nach MEUSNIER benannte Satz im euklidischen $R_n$ (und ebenso im $R_n$ konstanter Krümmung) das erste Glied einer Kette ähnlicher Sätze ist.

Wir sahen, daß die Projektion der ersten Normalen der Kurve (3) in den Normalenraum $N_{(n-l)}$ in eine Richtung des $N_{(n-l)}$ fällt, die nur von der Tangente ${}_{(1)}\xi_i$ im betreffenden Punkte der Kurve abhängt. Wir werden diese Richtung ${}_{(2)}\Xi_i^{(1)}$ als den $n-l$ten Vektor des den $N_{(n-l)}$ aufspannenden normierten $n-l$-Beins wählen:

(12) $${}_{(n-l)}\lambda_i = {}_{(2)}\Xi_i^{(1)}.$$

Der größte, auf ${}_{(2)}\Xi_i^{(1)}$ normale Vektorunterraum $N_{(n-l-1)}$ von $N_{(n-l)}$ wird durch das normierte $n-l-1$-Bein

$$(13) \qquad {}_{(\alpha)}\lambda_i \qquad (\alpha=1,\ldots,n-l-1)$$

aufgespannt. Jeder Vektor des normierten $n-l-1$-Beins (13) ist dann normal auf die erste Normale jeder $C$ im betrachteten Punkte tangierenden Kurve. Insbesondere gilt längs $C$

$$(14) \qquad {}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(2)}\xi_i = 0 \qquad (\alpha=1,\ldots,n-l-1).$$

Der Vektorraum $N_{(n-l-1)}$ ist in jedem Punkte der Kurve (3) durch die Richtung ${}_{(1)}\xi_i$, also durch $x_i$, ${}_{(1)}\xi_i$, völlig bestimmt, das gleiche gilt dann vom normierten $n-l-1$-Bein (13). Differentiation von (14) nach $s$ ergibt

$$(15) \qquad \frac{d_{(\alpha)}\lambda_i}{ds}\, {}_{(2)}\xi_i = -\frac{{}_{(\alpha)}\lambda_i\, {}_{(3)}\xi_i}{\varrho_2} \qquad (\alpha=1,\ldots,n-l-1).$$

Da ${}_{(\alpha)}\lambda_i$ nur von $x_i$, ${}_{(1)}\xi_i$ abhängt, so ist $\frac{d_{(\alpha)}\lambda_i}{ds}$ durch $x_i$, ${}_{(1)}\xi_i$ und $\frac{{}_{(2)}\xi_i}{\varrho_1}$ bestimmt. Nun ist $\frac{1}{\varrho_1}$ selbst durch ${}_{(1)}\xi_i$ und ${}_{(2)}\xi_i$ gegeben, demnach $\frac{d_{(\alpha)}\lambda_i}{ds}$ durch $x_i$, ${}_{(1)}\xi_i$ und ${}_{(2)}\xi_i$. Somit entnehmen wir aus (15):

*Alle Kurven der $F_l$, die in einem Punkte $P$ gleiche Tangente, erste und zweite Normale besitzen, haben daselbst die gleiche zweite Krümmung.*

Überschiebung von (15) mit ${}_{(\alpha)}\lambda_k$ ergibt

$$(16) \qquad {}_{(\alpha)}\lambda_k \frac{d_{(\alpha)}\lambda_i}{ds}\, {}_{(2)}\xi_i = -\frac{1}{\varrho_2}\, \underline{{}_{(3)}\xi_k},$$

wo $\underline{{}_{(3)}\xi_k}$ die Projektion von ${}_{(3)}\xi_k$ in den $N_{(n-l-1)}$ ist. Daraus folgt:

*Der Projektionsvektor der zweiten Normalen aller Kurven gleicher Tangente und gleicher erster Normale in einem Punkte $P$ der $F_l$ in den $N_{(n-l-1)}$ Vektorraum hat für alle diese Kurven die gleiche Richtung.*

Wir schneiden die $F_l$ mit der in $P$ durch ${}_{(1)}\xi_i$, ${}_{(2)}\xi_i$ und den $N_{(n-l-1)}$ aufgespannten $E_{n-l+1}\left\{{}_{(1)}\xi, {}_{(2)}\xi, N_{(n-l-1)}\right\}$, die Schnittkurve heiße — obwohl sie kein eigentlicher Normalschnitt ist — *Normalschnitt II*. Wenn wir mit ${}_{(1)}\Xi_i^{(2)}$, ${}_{(2)}\Xi_i^{(2)}$, ${}_{(3)}\Xi_i^{(2)}, \ldots$, das begleitende Bein dieser Schnittkurve bezeichnen, so gilt im betrachteten Punkt $P$

$$(17) \qquad {}_{(1)}\Xi_i^{(2)} = {}_{(1)}\xi_i, \quad {}_{(2)}\Xi_i^{(2)} = {}_{(2)}\xi_i.$$

Ist nämlich ${}_{(\beta)}\nu_i$ das den Normalenvektorraum der eben definierten $E_{n-l+1}$ aufspannende, normierte $l-1$-Bein, so gilt in $P$

$$(18) \qquad {}_{(\beta)}\nu_i\, {}_{(1)}\xi_i = 0, \quad {}_{(\beta)}\nu_i\, {}_{(2)}\xi_i = 0, \quad {}_{(\beta)}\nu_i\, {}_{(\alpha)}\lambda_i = 0 \ \binom{\alpha=1,\ldots,n-l-1}{\beta=1,\ldots,l-1}.$$

Nun genügt ${}_{(1)}\xi_i(P)$ den Gleichungen

$$(19)\qquad \begin{cases} {}_{(1)}\xi_i(P)\;{}_{(\alpha)}\lambda_i(P) = 0 & (\alpha = 1, \quad, n-l), \\ {}_{(1)}\xi_i(P)\;{}_{(\beta)}\nu_i(P) = 0 & (\beta = 1, \ldots, l-1) \end{cases}$$

Durch das System (19) ist, falls von gewissen Ausnahmskurven abgesehen wird, der Einheitsvektor ${}_{(1)}\xi_i(P)$ bestimmt. Aus einer Abhängigkeit der Vektoren ${}_{(\alpha)}\lambda_i(P)$ $(\alpha = 1, \ldots, n-l)$ und ${}_{(\beta)}\nu_i(P)$ $(\beta = 1, \ldots, l-1)$, also aus

$$(20)\qquad {}_{(\alpha)}R\,{}_{(\alpha)}\lambda_i(P) = {}_{(\beta)}T\,{}_{(\beta)}\nu_i(P) \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-l;\ \beta = 1, \ldots, l-1)$$

folgt, da ${}_{(\alpha)}\lambda_i(P)\;{}_{(\beta)}\nu_i(P) = 0$ ist, für $\alpha = 1, \ldots, n-l-1$

$$(21)\qquad {}_{(\alpha)}R = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, n-l-1).$$

Somit ist

$$(22)\qquad {}_{(n-l)}\lambda_i(P) = {}_{(2)}\Xi_i^{(2)}(P) = {}_{(\beta)}\overline{T}\,{}_{(\beta)}\nu_i(P) \qquad (\beta = 1, \ldots, l-1)$$

eine Folge von (20), wenn (20) nicht identisch befriedigt ist. Da weiter ${}_{(\beta)}\nu_i(P)\;{}_{(2)}\xi_i(P) = 0$ gilt, ist dann

$$(23)\qquad {}_{(2)}\Xi_i^{(2)}(P)\;{}_{(2)}\xi_i(P) = 0,$$

d. h. für die betrachtete Kurve gibt es in $P$ keine Projektion der zweiten Normalen ${}_{(2)}\xi_i$ in den Normalenraum der $F_l$. Wir müssen solche Kurven (Asymptotenkurven) von der weiteren Betrachtung ausschließen, dann aber bestimmt das System (19) den Vektor ${}_{(1)}\xi_i(P)$ völlig. Da aber auch ${}_{(1)}\Xi_i^{(2)}(P)$ dem Systeme genügt, gilt

$${}_{(1)}\Xi_i^{(2)}(P) = {}_{(1)}\xi_i(P).$$

Die zweite Normale ${}_{(2)}\xi_i$ von $C$ in $P$ befriedigt die Gleichungen

$$(24)\qquad \begin{cases} {}_{(\beta)}\nu_i(P)\;{}_{(2)}\xi_i(P) = 0 & (\beta = 1, \ldots, l-1), \\ {}_{(\alpha)}\lambda_i(P)\;{}_{(2)}\xi_i(P) = 0 & (\alpha = 1, \ldots, n-l-1), \\ {}_{(1)}\xi_i(P)\;{}_{(2)}\xi_i(P) = 0. & \end{cases}$$

Die Vektoren ${}_{(\beta)}\nu_i(P)$, ${}_{(\alpha)}\lambda_i(P)$ und ${}_{(1)}\xi_i(P)$ in (24) sind zu je zweien normal, demnach sind die Relationen (24) linear unabhängig und bestimmen ${}_{(2)}\xi_i(P)$ völlig. Da ${}_{(2)}\Xi_i^{(2)}(P)$ auch diesen Relationen genügt, gilt

$${}_{(2)}\Xi_i^{(2)}(P) = {}_{(2)}\xi_i(P),$$

w. z. b. w. Wenn wir die der Relation (16) analoge für den Normalschnitt $II$ anschreiben, so folgt aus ihr, (16) und (17),

$$(25)\qquad \frac{1}{\varrho_2}\,\underline{{}_{(3)}\xi_i(P)} = \frac{1}{\mathsf{P}_2}\,\underline{{}_{(3)}\Xi_i^{(2)}(P)},$$

wo $\frac{1}{\mathsf{P}_2}$ die zweite Krümmung des Normalschnittes $II$ in $P$ bezeichnet.

Nun liegt ${}_{(3)}\Xi_i^{(2)}$ in der $E_{n-l+1}\left\{{}_{(1)}\xi(P),\ {}_{(2)}\xi(P),\ N_{(n-l-1)}(P)\right\}$, und da dieser Vektor außerdem auf ${}_{(1)}\xi_i(P)$ und ${}_{(2)}\xi_i(P)$ wegen (17) normal steht, so liegt er im $N_{(n-l-1)}$, d. h. es ist

$$\underline{{}_{(3)}\Xi_i^{(2)}} = {}_{(3)}\Xi_i^{(2)}.$$

Dann aber folgt aus (25) durch Überschiebung mit ${}_{(3)}\Xi_i^{(2)}(P)$

$$\varrho_2 = \mathrm{P}_2 \cos\left({}_{(3)}\Xi^{(2)},\ {}_{(3)}\xi\right), \tag{26}$$

der MEUSNIERsche Satz für die zweite Krümmung.

Wir glauben im vorhergehenden den Beweisgang hinreichend charakterisiert zu haben und überlassen es dem Leser, die entsprechenden Schlüsse, die dritten und weiteren Krümmungen betreffend, zu ziehen.

## II. Der Gaußsche Integralsatz im Riemannschen $R_n$.

Ist $\lambda^i$ ein in einem Gebiete $G$ des $R_n$ stetig differenzierbarer Vektor, so versteht man unter seiner Divergenz den Skalar

$$\operatorname{div}\lambda = \frac{\mathfrak{d}\lambda^i}{\mathfrak{d}x_i} = \frac{\partial\lambda^i}{\partial x_i} + \begin{Bmatrix} p\,i \\ i \end{Bmatrix}\lambda^p. \tag{1}$$

Nun ist

$$\begin{Bmatrix} p\,i \\ i \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_p}. \tag{1'}$$

Bezeichnen wir mit $g$ die (positive) Determinante der $g_{ik}$, so gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x_p} = \frac{\partial g}{\partial g_{ij}}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_p}. \tag{2}$$

Aber wegen $\quad \dfrac{\partial g}{\partial g_{ij}} g_{ih} = \delta_{hj}\, g \quad$ ist $\quad \dfrac{\partial g}{\partial g_{ij}} = g\cdot g^{ij},$

also

$$\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x_p} = g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_p}. \tag{2'}$$

Damit wird (1)

$$\operatorname{div}\lambda = \frac{\partial\lambda^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x_i}\lambda^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}\,\lambda^i}{\partial x_i}. \tag{3}$$

Wir bilden den $R_n$ ein-eindeutig auf ein Gebiet eines auf rechtwinklige kartesische Koordinaten bezogenen euklidischen $R_n$ ab, indem wir die Punkte mit gleichen Koordinaten einander entsprechen lassen. Sei dann

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = 0 \tag{4}$$

die Gleichung einer geschlossenen $F_{n-1}$, die das euklidische Abbild des $R_n$ in zwei zusammenhängende Gebiete, ein Innengebiet $G$ und das entsprechende Außengebiet teile. $G$ liege dabei ganz im Endlichen. Die durch (4) definierte Punktmenge $F_{n-1}$ habe mit jeder Geraden, die einer der $x_i$-Achsen parallel ist, eine endliche Zahl von Schnittpunkten. Weiter sei die Funktion $\Phi$ in einer Umgebung eines jeden Punktes $P$ der $F_{n-1}$ so definiert, daß ihr Wert negativ in den Punkten des Gebietes $G$ und positiv in den Punkten des Außengebietes sei. Die Ableitung $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ existiere im ganzen Definitionsgebiet der Funktion $\Phi$ (die $F_{n-1}$ und Umgebung) und sei daselbst stetig.

Wir sagen dann, ein Vektor $\varrho^i$ eines Punktes $P$ der $F_{n-1}$ sei *ins Außengebiet gerichtet*, wenn

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \varrho^i > 0 \tag{5}$$

ist. Wir betrachten nun im $R_n$ das über $G$ erstreckte $n$fache Integral

$$\int \sqrt{g}\, \operatorname{div} \lambda \, dx_1 \ldots dx_n = \int \frac{\partial \sqrt{g}\, \lambda^i}{\partial x_i} dx_1 \ldots dx_n, \tag{6}$$

dessen $i$ten Summanden (über $i$ jetzt nicht summiert)

$$\int \frac{\partial \sqrt{g}\, \lambda^i}{\partial x_i} dx_i\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n \tag{7}$$

wir nach $x_i$ integrieren. Wir erhalten dafür

$$\int \pm \sqrt{g}\, \lambda^i \, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n, \tag{8}$$

wo $+$ an den Austrittsstellen und $-$ an den Eintrittsstellen der Integration zu nehmen ist.

Nun sei auf der $F_{n-1}$ ein Parametersystem $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ gegeben und

$$\gamma_{pq} = g_{ik} \frac{\partial x_i}{\partial \sigma_p} \frac{\partial x_k}{\partial \sigma_q} \qquad (i, k = 1, \ldots, n;\; p, q = 1, \ldots, n-1) \tag{9}$$

der Maßtensor in diesen Parametern.[1]) Bezeichnen wir mit $\Phi_i$ *die in das Außengebiet gerichtete normierte Normale* in einem Punkte $P$ der $F_{n-1}$, so ist

$$\Phi_i = \frac{\dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i}}{\sqrt{g^{ik} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_i} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_k}}}, \tag{10}$$

wo nach (5) die positive Wurzel zu nehmen ist. Dann gilt

$$|g_{ik}| \cdot \begin{vmatrix} \Phi^1 & \Phi^2 & \ldots & \Phi^n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \sigma_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \sigma_1} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \sigma_{n-1}} & \dfrac{\partial x_2}{\partial \sigma_{n-1}} & \ldots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{vmatrix}^2 = |\gamma_{pq}|, \tag{11}$$

1) Wir beachten dabei nur die Umgebung eines Punktes der $F_{n-1}$.

wo $|g_{ik}|$ die Determinante der $g_{ik}$, $|\gamma_{pq}|$ die der $\gamma_{pq}$ bedeutet. Nun ist $\Phi_i$ proportional dem algebraischen Komplement $[\Phi^i]$ von $\Phi^i$ in

$$\begin{vmatrix} \Phi^1 & \Phi^2 & \ldots & \Phi^n \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{vmatrix},$$

d. h. es ist $\Phi_i = \alpha[\Phi^i]$.[1]) Nach (11) erhalten wir für $\alpha : \alpha^{-2}|g_{ik}|(\Phi^i \Phi_i)^2 = |\gamma_{pq}|$, also gilt

$$(12)\quad \Phi_1 = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial x_2}{\partial \sigma_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}, \quad \Phi_2 = \mp \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \sigma_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_{n-1}} & \frac{\partial x_3}{\partial \sigma_{n-1}} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_{n-1}} \end{vmatrix} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}, \ldots,$$

die auftretenden Wurzeln positiv genommen.

Wir betrachten insbesondere

$$(13)\qquad \Phi_i = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma_1} & \ldots & \frac{\partial x_{i-1}}{\partial \sigma_1} & \frac{\partial x_{i+1}}{\partial \sigma_1} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial \sigma_1} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \end{vmatrix} \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}}$$

in einem Punkte $P$ der $F_{n-1}$. Wir nehmen an, die in (13) rechts stehende Determinante sei positiv. Dann ist in (13) das Zeichen + oder — zu setzen, je nachdem $P$ bei der Integration nach $x_i$ Austritts- oder Eintrittsstelle war. Denn nach (10) hat $\Phi_i$ dasselbe Vorzeichen wie $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$, $\Phi$ aber wächst an den Austrittsstellen und nimmt ab an den Eintrittsstellen einer Kurve in das Gebiet $G$.

Für die Parameter

$$(14)\quad x_1 = \sigma_1, \ldots, \quad x_{i-1} = \sigma_{i-1}, \quad x_{i+1} = \sigma_i, \quad x_{i+2} = \sigma_{i+1}, \ldots, x_n = \sigma_{n-1}$$

ist die Determinante (13) rechts gleich eins, also gilt

$$(15)\qquad \Phi_i = \pm \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\gamma}},$$

wo + an den Austritts-, — an den Eintrittsstellen zu setzen ist. Damit ist (8) gleich

$$(16)\quad \int \lambda^i \Phi_i \sqrt{\gamma}\, dx_1 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n = \int \lambda^i \Phi_i\, dO \quad \text{(nicht summieren über } i\text{)},$$

---

1) Denn es ist $[\Phi^i] \frac{\partial x_i}{\partial \sigma_p} = 0$ $(p = 1, \ldots, n-1)$. (Zwei Zeilen einer Determinante sind gleich.)

wo $dO$ das invariante Oberflächenelement der $F_{n-1}$ bedeutet. Aus (6) folgt also (wieder summieren über $i$)

$$\int_G \operatorname{div} \lambda \, dv = \int \Phi_i \lambda^i \, dO, \tag{17}$$

wo $dv$ das invariante Volumenelement von $G$, und $\Phi_i$, um zu erinnern, die *ins Außengebiet von G gerichtete* Normale der Begrenzung $F_{n-1}$ von $G$ ist. *Die Relation* (17) *heißt die Integralformel von Gauß.*

## III. Der Tensorkalkül in der klassischen Mechanik.

Es handelt sich im folgenden nur um ein Anwendungsbeispiel; wir wählen dafür die *Eulerschen Kreiselgleichungen.*

Legen wir der Betrachtung Koordinatensysteme $S$ zugrunde, die untereinander durch die Transformationen der Gruppe

$$\text{(G)} \qquad \begin{cases} \bar{x}_i = a_{ik}(t)\, x_k \\ \bar{t} = t \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

zusammenhängen, in der die Matrix der $a_{ik}(t)$ orthogonal ist, so entspricht der Eigenart der Gruppe (G) ein besonderer Tensorkalkül. Die vierte Koordinate $x_4 = t$ ist nach (G) eine Invariante, ein Skalar: die Zeit $t$.

Die Transformationsgesetze der Komponenten des kontravarianten Vektors $x_1, x_2, x_3, x_4$; $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4$ lauten

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \bar{\lambda}^i = a_{ik}(t)\, \lambda^k + a'_{ik}(t)\, x_k \lambda^4 \\ \bar{\lambda}^4 = \lambda^4. \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3)$$

Aus ihnen schließen wir:

a) $x_1, x_2, x_3, 0$ ist das Komponentensystem eines kontravarianten Vektors, *der mit $\xi^i$ bezeichnet sei*: $\xi^i = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, $\xi^4 = 0$.

b) Verschwinden in einem unserer Koordinatensysteme die Komponenten des kontravarianten Tensors $T^{ij\cdots}$, bei denen mindestens ein Index gleich 4 ist, so verschwinden diese Komponenten in jedem unserer Koordinatensysteme. Einen kontravarianten Tensor mit dieser Eigenschaft wollen wir *raumartig* nennen. Die nicht verschwindenden Komponenten eines raumartigen kontravarianten Tensors genügen den Transformationsgesetzen

$$\bar{T}^{ij\cdots} = a_{ip}(t)\, a_{jq}(t) \ldots T^{pq\cdots} \qquad (i, j, p, q \ldots = 1, 2, 3). \tag{1'}$$

Daraus folgt:

c) Man kann vom raumartigen kontravarianten Tensor $T^{ij\cdots}$ „der Hyperebene $t$“ sprechen. Das heißt: das Komponentensystem eines raumartigen kontravarianten Tensors eines Punktes $P(x_1, x_2, x_3, t)$ der Hyperebene $x_4 = t$ ist das Komponentensystem eines raumartigen kontravarianten Tensors in irgendeinem beliebigen Punkte $Q$ dieser Hyperebene. Infolge dieser Bemerkung gilt weiter:

d) Man kann raumartige kontravariante Tensoren der Hyperebene $t$ addieren.

Die Bemerkungen a) bis d) genügen zur Herleitung der Eulerschen Kreiselgleichungen.

In der von uns betrachteten Gesamtheit von Koordinatensystemen sei ein Inertialsystem enthalten, und zwar sei dieses das System $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, t$. Mit $g_{ik}$ bezeichnen wir den kovarianten Tensor, dessen Komponenten im Inertialsysteme $\bar{g}_{ik} = \delta_{ik}$ sind. Er sei der Maßtensor unseres $R_4$. Ein mit einem Koordinatensysteme $S$, z. B. $x_1, x_2, x_3, t$, starr verbundenes System von Massenpunkten heißt ein Kreisel, der Punkt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ dieses Koordinatensystemes sein Drehzentrum.[1])

Bilden wir zur „Zeit $t$" die Tensorsumme (über alle Massenpunkte des Systems)

(2)
$$U^{ik} = \sum m\left(\xi^i \frac{\mathfrak{d}^2 x_k}{\mathfrak{d} t^2} - \xi^k \frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} t^2}\right) \qquad (i, k = 1, \ldots, 4),$$

so stellt sie als Summe von Produkten raumartiger Vektoren der Hyperebene $t$ einen raumartigen kontravarianten Tensor dieser Hyperebene dar. Wirken auf den Kreisel nur innere, und zwar zentrale Kräfte, so verschwindet $U^{ik}$, da dies im Inertialsystem gilt.

Im System $x_1, x_2, x_3, t$, das mit dem Kreisel starr verbunden ist, gilt $d x_i = d^2 x_i = \cdots = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, also lauten die Gleichungen $U^{ik} = 0$ in diesem System

(3)
$$0 = \sum m\left(\xi^i \begin{Bmatrix} 4\,4 \\ k \end{Bmatrix} - \xi^k \begin{Bmatrix} 4\,4 \\ i \end{Bmatrix}\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3).$$

*Diese Gleichungen sind bereits die Eulerschen Kreiselgleichungen*; wir erhalten sie mittels weniger Umformungen in der bekannten Gestalt. Zu diesem Zwecke sind die Klammern $\begin{Bmatrix} 4\,4 \\ k \end{Bmatrix}$ zu berechnen. Da im Inertialsystem $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{t}$

(4)
$$\begin{cases} \bar{x}_i = a_i \bar{t} + b_i \\ \bar{x}_4 = \quad \bar{t} \end{cases}$$

die allgemeinste Lösung des Systems $\frac{\mathfrak{d}^2 \bar{x}_i}{\mathfrak{d} t^2} = 0$ ist, so ist im System $x_1, x_2, x_3, t$ (das mit diesem Inertialsystem durch die angeschriebene Transformation der Gruppe $G$ verknüpft ist)

1) „Starr verbunden" besagt, daß im betreffenden Koordinatensystem die drei ersten Koordinaten $x_1, x_2, x_3$ eines jeden Massenpunktes von $t$ unabhängig sind.

$$(4')\qquad \begin{cases} a_{ik}(t)\, x_k(t) = a_i t + b_i \\ x_4 = t \end{cases}$$

die allgemeinste Lösung von $\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} t^2} = 0$. Aus (4′) folgt

$$(5)\qquad a_i = a'_{ik} x_k + a_{ik} x_k', \quad 0 = a''_{ik} x_k + 2a'_{ik} x_k' + a_{ik} x_k''.$$

Da $a_{ik} a_{ij} = \delta_{kj}$ ist, erhalten wir durch Überschiebung mit $a_{ij}$ daraus

$$(6)\qquad \begin{cases} x_j'' + 2a_{ij}\, a'_{ik}\, x_k' + a_{ij}\, a''_{ik} x_k = 0 \\ t'' \hfill = 0, \end{cases}$$

und diese Gleichungen müssen mit $\frac{\mathfrak{d}^2 x_i}{\mathfrak{d} t^2} = 0$ identisch sein. Wir haben somit

$$(7)\qquad \left\{ {44 \atop j} \right\} = a_{ij}\, a''_{ik}\, x_k$$

und statt (3)

$$(8)\qquad \sum m\, \xi^i \xi^l\, a_{hk}\, a''_{hl} - \sum m\, \xi^k \xi^l\, a_{hi}\, a''_{hl} = 0 \qquad (i, l, h, k = 1, 2, 3).$$

Führen wir den raumartigen Tensor $T^{il} = \sum m\, \xi^i \xi^l$ ein, so können wir statt (8)

$$(9)\qquad T^{il}\, a_{hk}\, a''_{hl} - T^{kl}\, a_{hi}\, a''_{hl} = 0 \qquad (i, l, h, k = 1, 2, 3)$$

schreiben. $T^{il}$ ist der „Trägheitstensor" des Systems der Massenpunkte. Aus der Transformation (G) gewinnen wir durch Überschiebung mit $a_{ir}(t)$ die Umkehrung

$$(10)\qquad x_r = a_{ir}(t) \bar{x}_i .$$

Ist $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ ein fester Punkt im Inertialsystem, so ist sein Geschwindigkeitsvektor in bezug auf das mit dem Kreisel starr verbundene System $x_1, x_2, x_3$ nach (10) gleich

$$(11)\qquad \frac{d x_r}{dt} = a'_{ir}\, \bar{x}_i = a'_{ir}\, a_{ik}\, x_k = v_{kr}\, x_k ,$$

wenn wir

$$(12)\qquad a_{ik}\, a'_{ir} = v_{kr} \qquad (i, k, r = 1, 2, 3)$$

setzen. Aus (12) und $a_{ik} a_{ir} = \delta_{kr}$ folgt

$$(13)\qquad v_{kr} = -v_{rk} .$$

Es sind nach (11) und (13) $v_{23}, v_{31}, v_{12}$ die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Inertialsystems in bezug auf das mit dem Kreisel starr verbundene System $x_1, x_2, x_3$. Wegen (12) ist $a'_{ik} = v_{tk} a_{it}$, und durch Differentiation von (12) nach der Zeit $t$ erhalten wir

$$v'_{kr} = a'_{ik}\, a'_{ir} + a_{ik}\, a''_{ir} = v_{ik}\, v_{ir} + a_{ik}\, a''_{ir}, \tag{14}$$

was in (9) eingesetzt

$$T^{il}(v'_{kl} - v_{rk} v_{rl}) - T^{kl}(v'_{il} - v_{ri} v_{rl}) = 0 \tag{15}$$

ergibt.

Ist das mit dem Kreisel starr verbundene System $x_1, x_2, x_3$ auf dessen Hauptträgheitsachsen bezogen — dies ist vermittels einer orthogonalen Transformation stets erreichbar —, so erhalten wir statt (15) die EULERschen Kreiselgleichungen (wir schreiben kurz $T^i$ statt $T^{ii}$)

$$(T^i + T^k) v'_{ki} = (T^i - T^k) v_{rk} v_{ri} \qquad \left(\begin{smallmatrix}\text{nicht summieren}\\ \text{über } i \text{ und } k\end{smallmatrix}\right), \tag{16}$$

weil dann für $i \neq k$ stets $T^{ik} = 0$ ist.

# Register.


Abhängige Vektoren 7
Ableitung, tensorielle 29, 34
—, absolute oder kovariante 35
Ableitungsgleichungen 207
absolute Ableitung (-s Differential) 35
Abstandsaxiome 81
adjungierte Formen 205
— $n$-Beine 12
— Tensoren 23
affine Geometrie 6, 67
alternierende Tensoren 23
äquivalente Beine 203
Asymptotenlinien 159

Bedingungsgleichungen, algebraische 209
—, Codazzische 214
—, Gaußsche 212
begleitendes $k$-Bein einer Kurve 62
Bein ($n$-Bein) 11
—, normiertes 43
Beindarstellung 15
— absoluter Differentiale 38
Beinkomponenten 50
benachbarte Vektorräume 204
Bestimmungsstücke eines Tensors 12
— eines Vektors 5, 9
Bewegung 64, 68
Bewegungsgruppe 64, 191
Bianchi 127
Bogenlänge 51, 80

Christoffel 34
— -klammern 35
Codazzische Gleichungen 214

definit 27
Definitionspunkt 5, 9, 12
Differential, tensorielles 30
Dimension eines Vektorraumes 17
Drehzentrum 176

Ebene 140, 158
$\mathscr{E}$-Funktion, Weierstraßsche 102, 104, 114
Einbettungszahl 222
Eindeutigkeit der Parallelverschiebung 121, 147
Einheitsvektor 39
Eisenhart 121
erweiterte Bewegungsgruppe 64
euklidischer Raum 64
Eulersche Differentialgleichungen 89
— —, Normalform 91
— Kreiselgleichungen 240
Eulerscher Vektor 86
extensive Größe 4
Extremalbogen 85
— -gebiete 110

Feld (von Extremalbogen) 103
Fermi 137
Flächenvektor (-tensor) 56, 154
Formenproblem 215
— -quadrate 205, 219
Frenetformeln 62

Gaußsche Gleichungen 212
Gaußscher Integralsatz 240
Gefällsflächenfeld 112
— -kurven 104
— -parameter 105
gemischter Tensor 12
Geodätische 115
geodätische $F_l$ 132, 158
— — in engerem Sinn 133
— Koordinaten 117, 136
— Parallele 146
Geometrie, affine 6, 67
— projektive 4
gleichartige Tensoren 13
Graßmann 4
Graßmannsche Tensoren 20
Größe, extensive 4
—, skalare 4

halbdefinit 27
Hilbertscher Unabhängigkeitssatz 105
homotop 88
Hornich 22
Hüllkurvensatz 108
Hyperfläche 53

Identitäten von Bianchi 127
indefinit 27
Index des $J_p$ 204
induzierte Metrik 57
inneres Produkt 9, 16
Integralsatz, Gaußscher 240
Invariante 4
Invariantensystem, vollständiges 68
isotroper Kegel 40
Isotropie 128

kanonische Darstellung 25
Klein 67
Klein-Cayleysche Darstellung der $R_n$ konst. Krümmung 195
Komponenten eines Vektors 5, 9
— eines Tensors 12
konforme Abbildung 199
kongruent 68
Kongruenz um einen Punkt 174
kontravarianter Maßtensor 36
— Tensor 12
— Vektor 5
— Vektorraum 6, 16
Koordinaten im $R_n$ 1, 22
—, geodätische 117, 136
—, kartesische 64
—, natürliche 69
—, projektive 188
kovariante Ableitung 35
kovarianter Tensor 12
— Vektor 9
Kreiselgleichungen, Eulersche 240

Krümmung, Riemannsche 127
— einer Kurve 62
Krümmungstensor 120, 125
—, Beindarstellung 129
—, $k$ter, einer $F_l$, 212, 223
—, relativer 164

Länge eines Vektors 39
— — Kurvenbogens 51
Lense 22
Levi-Civita 118, 137, 161
linear abhängig (unabhängig) 7
Linearform 9

Maßtensor 28, 36
Metrik, induzierte 57
Meusnier, Satz von 234
$m$-System 1
Multilinearform 12

natürliche Koordinaten 69
$n$-Bein 11
normal 18
Normalenräume einer $F_l$ 202
— -vektor 62
Normalkoordinaten 97, 98, 116
— -vektorraum 18
normierter Plückerscher Tensor 46
— Vektor 39
normiertes $n$-Bein 43
Nullextremalen 90
— -tensor 15
— -vektor 7

offene Kugel 98
orthogonale Matrix 4

Parallele, geodätische 146
Parallelverschiebung 118
parallelverschobene Vektorräume 123, 147
Parameterkurve 84
Plückersche Tensoren 20
— —, normierte 46
Polarkoordinaten 181
Produkt von Tensoren 15
— -raum 153
Projektion eines Vektors 45
Projektionstensor 44
— -vektor 45
projektive Geometrie 67
— Koordinaten 188
pseudoeuklidischer Raum 194
Punktraum 1

Rang eines Tensors 2. Stufe 18
Raumvektor (-tensor) 154
relativer Krümmungstensor 164
relatives Minimum 83
Relativkrümmung 165
Ricciableitung, Riccidifferential 35
— verallgemeinert 156
Riccikalkül 31
—, erweiterter 156
Richtung 39
Riemannsche Krümmung 127
— Normalkoordinaten 116
Riemannscher Raum 28, 36
— — konstanter Krümmung 143, 181, 226

Scheffers 53
schiefsymmetrische Tensoren 23
Schmiegraum 123, 202
Schurscher Raum 167
Serret 53
sinnvolle Aussage 3
Skalar 4, 12
stetig differenzierbar 1, 22
Stufe (eines Tensors) 12
Summe von Tensoren 15
symmetrische Tensoren 23

Tangentenraum 154
— -vektor 51
Tangentenvektorraum 56
Tensor 12
Tensor, alternierender 23
—, gemischter 12
—, Plückerscher 20, 46
—, schiefsymmetrischer 23
—, symmetrischer 23
Tensoren, adjungierte 23
—, gleichartige 13
tensorielle Ableitung 29, 34
tensorielles Differential 30
Tensorindizes 13
Trägheitsgesetz 26
Trägheitstensor 242
transversal 107

überbenachbarte Vektorräume 204
Überschiebung 16
Umgebung 82
unabhängige Vektoren 7
Unabhängigkeitssatz, Hilbertscher 105

Variation, erste 85
Variationsproblem, positiv definites 80
Vektor, Eulerscher 86
—, kontravarianter 5
—, kovarianter 9
—, normierter 39
— (schlechthin) 36
Vektorräume, kontravariante 6, 16
—, parallelverschobene 123, 147
—, benachbarte und überbenachbarte 204
Verjüngung 15
vollständiges Invariantensystem 68
Volumen 47, 52, 57

Weierstraßsche $\mathcal{E}$-Funktion 102, 104, 114
Winkel zweier Vektoren 40

Zahlraum 1
zulässige Koordinaten 3